∽ CAPES interne 5 février 2009 ∽

Problème 1

Le théorème de Morley

C'est un théorème qui permet de fabriquer de la symétrie à partir de rien. Il a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : « **Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral** ».
Ce problème en propose trois démonstrations différentes.
Les trois parties sont indépendantes et les résultats de l'une ne peuvent donc pas être utilisés dans l'autre.

Notations
On travaille dans le plan affine euclidien.
Si O, A et B sont trois points du plan (avec $A \neq O$ et $B \neq O$), on note $\widehat{AOB}$ (ou $\widehat{BOA}$, ou même $\widehat{O}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0\,;\,\pi]$) délimité par les demi-droites [OA) et [OB).
Par abus de notation, on note encore $\widehat{AOB}$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.
Soit d une droite du plan passant par O, on dira que d est une trisectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si et seulement s'il existe un point M de d, distinct de O, tel que $\widehat{AOM} = \dfrac{1}{3}\widehat{AOB}$ ou $\widehat{AOM} = \dfrac{2}{3}\widehat{AOB}$ (de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices).
La distance entre deux points A et B est notée AB.

Partie A : Première démonstration

I. Préliminaires

Soit ABC un triangle non plat.

1. Construire à la règle et au compas le centre du cercle inscrit au triangle ABC, noté I.

   On laissera apparentes toutes les lignes de construction.
2. Prouver l'égalité $\widehat{BIC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.
3. On note A_1 le point d'intersection de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet A avec le segment [BC].

   Prouver que si J est un point intérieur au triangle ABC, situé sur la bissectrice issue de A (c'est-à-dire un point du segment $[AA_1]$) vérifiant l'égalité $\widehat{BJC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{A}}{2}$ alors le point J est confondu avec le point I.

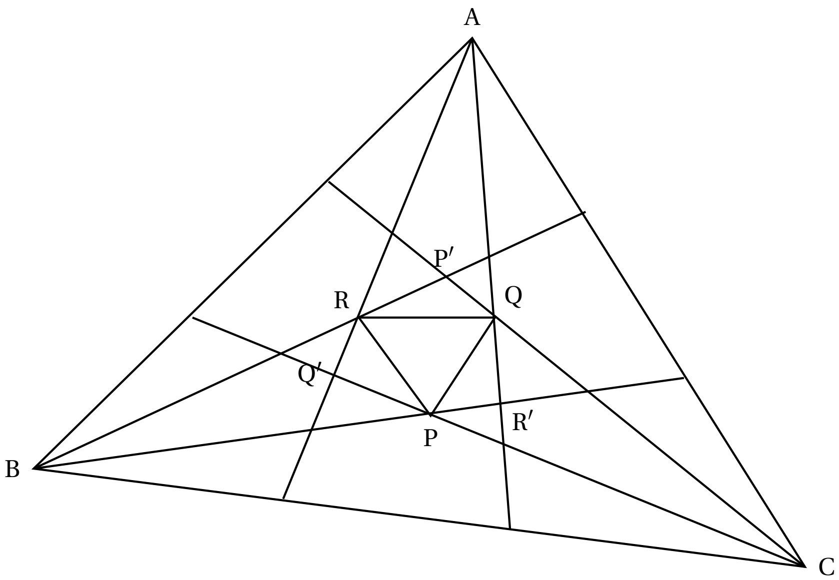
II. Construction auxiliaire

Soit PQR un triangle équilatéral et soient $u,\ v,\ w$ trois nombres réels de l'intervalle $]0\,;\,\dfrac{\pi}{3}[$ tels que $u + v + w = \dfrac{2\pi}{3}$. On construit sur les côtés du triangle PQR, et à l'extérieur de ce triangle, trois triangles :

- $P'QR$ isocèle en P' et dont les angles à la base ont pour mesure u,
- $PQ'R$ isocèle en Q' et dont les angles à la base ont pour mesure v,
- PQR' isocèle en R' et dont les angles à la base ont pour mesure w.

1. **a.** Calculer $\widehat{\mathrm{Q'RQ}} + \widehat{\mathrm{R'QR}}$ en fonction de u.

   b. Montrer que les droites (QR$'$) et (Q$'$R) sont sécantes. On notera A leur point d'intersection. On notera de même B le point d'intersection des droites (RP$'$) et (R$'$P) et C le point d'intersection des droites (PQ$'$) et (P$'$Q).



Dans la suite de la partie A on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

   c. Montre, que $\widehat{\mathrm{Q'PB}} = u$. En déduire la valeur de $\widehat{\mathrm{CPR'}}$.

   De même, on montre que $\widehat{\mathrm{R'QC}} = v$ *et* $\widehat{\mathrm{P'RA}} = w$ *et on en déduit la valeur de* $\widehat{\mathrm{AQP'}}$ *et de* $\widehat{\mathrm{BRQ'}}$.

2. **a.** Montrer que la droite (PP$'$) est une des médiatrices du triangle P$'$RQ.

   b. En déduire que (PP$'$) est une bissectrice du triangle BP$'$C.

3. **a.** Écrire $\widehat{\mathrm{BPC}}$ et $\widehat{\mathrm{BP'C}}r$ fonction de u.

   b. Montrer que $\widehat{\mathrm{BPC}} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\widehat{\mathrm{BP'C}}}{2}$.

4. Montrer que P appartient aux bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{P'BC}}$ et $\widehat{\mathrm{P'CB}}$.

   De même, on montre que Q appartient aux bissectrices des angles $\widehat{\mathrm{Q'CA}}$ *et* $\widehat{\mathrm{Q'AC}}$, *et que R appartient aux bissectrices des angles* $\widehat{\mathrm{R'AB}}$ *et* $\widehat{\mathrm{R'BA}}$.

5. Dresser, en la justifiant, la liste des six trisectrices du triangle ABC.

6. Donner les mesures des angles $\widehat{\mathrm{CAB}}$, $\widehat{\mathrm{ABC}}$, et $\widehat{\mathrm{BCA}}$ en fonction de $u,\ v,\ w$.

III. Démonstration du théorème

Soient $\mathrm{A_1B_1C_1}$ un triangle non plat et $u,\ v,\ w$ les réels définis par les relations suivantes :

$$\widehat{\mathrm{A_1}} = \pi - 3u,\ \ \widehat{\mathrm{B_1}} = \pi - 3v,\ \ \widehat{\mathrm{C_1}} = \pi - 3w.$$

1. Calculer $u + v + w$.

2. Soit PQR un triangle équilatéral quelconque. La construction de la question I. 1., à partir du triangle PQR et des valeurs de u, v et w ici définies, aboutit à un triangle ABC.
   Justifier que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.
3. Démontrer le théorème de Morley.

Partie B : Deuxième démonstration

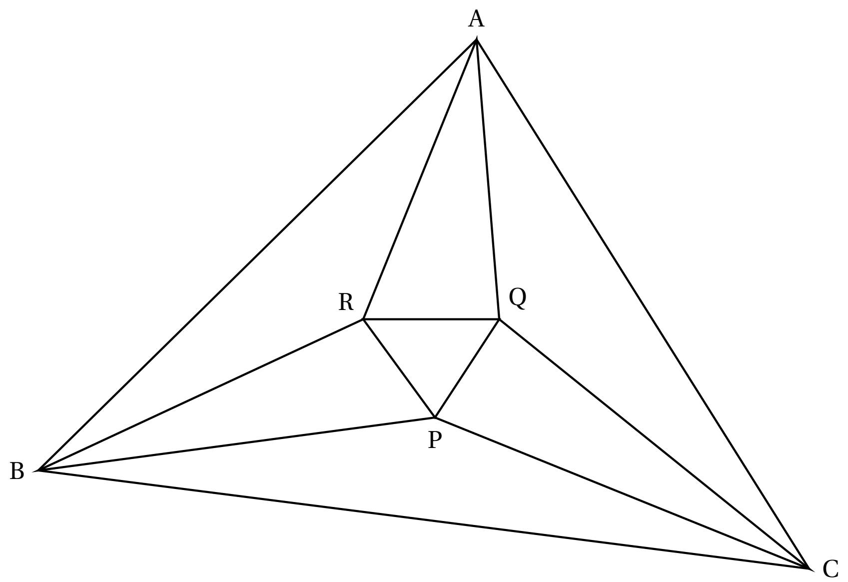
I. La relation des sinus

Soit ABC un triangle non plat, O le centre de son cercle circonscrit et r le rayon de son cercle circonscrit. On note $a = \text{BC}$, $b = \text{AC}$, $c = \text{AB}$.

1. Montrer que $\dfrac{a}{\sin\widehat{\text{A}}} = 2r$ (on distinguera les cas $\widehat{\text{A}} < \dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{\text{A}} = \dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{\text{A}} > \dfrac{\pi}{2}$)
2. En déduire la relation dite des sinus : $\dfrac{a}{\sin\widehat{\text{A}}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{\text{B}}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{\text{C}}} = 2r$.

II. Démonstration du théorème de Morley

Soit ABC un triangle non plat quelconque. On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets B et C, C et A, A et B. tels que définis par la figure ci-dessous. Soient α, β, γ les réels définis par $\widehat{\text{A}} = 3\alpha$, $\widehat{\text{B}} = 3\beta$, $\widehat{\text{C}} = 3\gamma$.



Dans la suite de la partie B on pourra se fier au schéma ci-dessus en ce qui concerne les positions relatives des différents points sur une droite donnée, ou les positions relatives des droites considérées, sans chercher à les justifier.

1. En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que :

$$\text{AR} = 2r\sin\beta\frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

2. Montrer que, pour tout nombr réel θ, on a la relation suivante : $\sin 3\theta = \sin\theta\left(4\cos^2\theta - 1\right)$.
   On rappelle que, pour tout couple de réels $(p,\ q)$, *on a la relation suivante :*

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin p - q2$$

3. Montrer que : $4\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)=\dfrac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.
4. Montrer que : $\text{AR}=8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)$.
5. En déduire que : $\text{AQ}=8r\sin\beta\sin\gamma\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)$

   et que : $\dfrac{\text{AR}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\gamma\right)}=\dfrac{\text{AQ}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)}=8r\sin\beta\sin\gamma$.
6. On considère le point M de la demi-droite [AQ) vérifiant $\widehat{\text{ARM}}=\dfrac{\pi}{3}+\beta$.

   a. Calculer $\widehat{\text{AMR}}$.

   b. En appliquant la relation des sinus dans le triangle ARM, montrer AM = AQ.

   c. Montrer que les points M et Q sont confondus

   d. Prouver les égalités suivantes, $\widehat{\text{ARQ}}=\dfrac{\pi}{3}+\beta$ et $\widehat{\text{AQR}}=\dfrac{\pi}{3}+\gamma$
7. Montrer que $\text{RQ}=8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
8. Conclure.

Partie C : Troisième démonstration

La démonstration qui suit est basée sur un article d'Alain Connes datant de 1998 (Institut des Hautes Études Scientifiques).

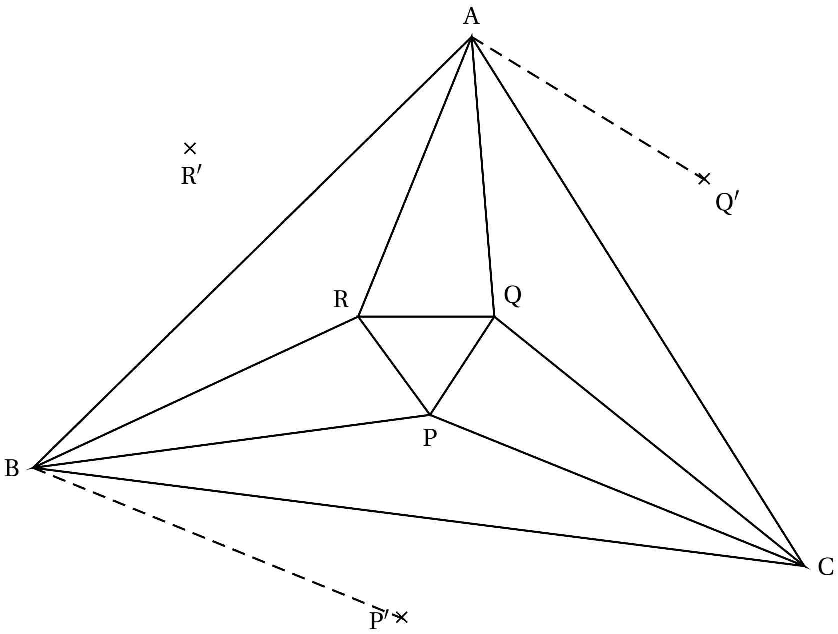
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Chaque point $M(x\ ;\ y)$ du plan est aussi repéré par son affixe, c'est-à-dire le nombre complexe $z=x+\text{i}y$.
Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nul, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Le complexe égai à $\exp\left(2\text{i}\dfrac{\pi}{3}\right)$ est noté j.

I. Préliminaires

1. Résoudre l'équation $z^3-1=0$ dans $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $1+\text{j}+\text{j}^2=0$.
3. On considère trois points P, Q, R du plan complexe d'affixes respectifs $p,\ q,\ r$.
   Prouver que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{PQ}},\ \overrightarrow{\text{PR}}\right)$ de mesure principale égale à $\dfrac{\pi}{3}$, si et seulement si $p+\text{j}q+\text{j}^2r=0$.
   Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral direct.
4. Montrer que le triangle PQR est équilatéral, avec l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{PQ}},\ \overrightarrow{\text{PR}}\right)$ de mesure principale égale à $-\dfrac{\pi}{3}$ et seulement si $p+\text{j}^2q+\text{j}r=0$.
   Dans ce cas, on dit que le triangle PQR est un triangle équilatéral indirect.

II. Généralités

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$ soit comprise strictement entre 0 et π.
On note $3\alpha,\ 3\beta$ et 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right)$, $\left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BA}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{CA}},\ \overrightarrow{\text{CB}}\right)$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.
On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous.



On note P′, Q′ et R′ les symétriques des points P, Q et R respectivement par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB), et A′ le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
On rappelle qu'une rotation de centre Ω et d'angle θ ($\theta \in]0\,;\,2\pi[$) est une similitude directe de centre Ω et de rapport $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α, g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ.

1. Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{CP}}, \overrightarrow{\mathrm{CP'}}\right)$.
2. Montrer que P est un point fixe de la transformation $g \circ h$, R un point fixe de la transformation $f \circ g$ et Q un point fixe de la transformation $h \circ f$.

III. Quelques calculs numériques
Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus de langage on note encore $\varphi(z)$ l'affixe du point φ(M).

1. Justifier l'existence de six nombres complexes $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1, b_2,\ b_3$ tels que, pour tout nombre complexe z :
$$f(z) = a_1 z + b_1,\ g(z) = a_2 z + b_2 \text{ et } h(z) = a_3 z + b_3.$$
2. Prouver que ces nombres complexes vérifient les propriétés suivantes :
$$a_1 a_2 a_3 = j, \quad a_1 a_2 \neq 1, \quad a_2 a_3 \neq 1 \quad \text{et} \quad a_3 a_1 \neq 1.$$
3. Prouver que les nombres $p,\ q$ et r vérifrent les égalités suivantes :
$$p = \frac{a_2 b_3 + b_2}{1 - a_2 a_3},\ \ q = \frac{a_3 b_1 + b_3}{1 - a_3 a_1},\ \text{et } r = \frac{a_1 b_2 + b_1}{1 - a_1 a_2}$$
4. Un calcul (un peu lourd, mais faisable à la main) donne alors les deux résultats qui suivent.
   - D'une part, pour tout nombre complexe z, on a :
$$\left(f^3 \circ g^3 \circ h^3\right)(z) = (a_1 a_2 a_3)^3 z + \left(a_1^2 + a_1 + 1\right) b_1 + a_1^3 \left(a_2^2 + a_2 + 1\right) b_2 + a_1^3 a_2^3 \left(a_3^2 + a_3 + 1\right) b_3$$

- D'autre part en tenant compte du fait que $a_1 a_2 a_3 = j$, on a :

$$p+\mathrm{j}q+\mathrm{j}^2 r = -\mathrm{j}^2 \frac{a_3\left[\left(a_1^2+a_1+1\right)b_1+a_1^3\left(a_2^2+a_2+1\right)b_2+a_1^3a_2^3\left(a_3^2+a_3+1\right)b_3\right]}{a_1\left(1-a_2a_3\right)\left(1-a_3a_1\right)\left(1-a_1a_2\right)}$$

On admet ces deux résultats.

a. Prouver que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation notée τ.

b. Déterminer géométriquement l'image du point A par la translation τ.
En déduire que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est égale à l'application identité.

c. Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle ABC direct puis dans le cas d'un triangle ABC indirect.

FIN

Problème 2

Interpolation polynômiale, méthode des différences finies

La Partie I est indépendqnte des parties suivantes
En revanche les parties II, III er IV sont liées.

Partie I. Approximation d'une fonction sur un intervalle
Le plan est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$.
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

1. Étude de la fonction f

a. Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction f, avec une unité graphique de 4 cm.

2. Une première approximation

a. Déterminer la fonction polynômiale R de degré 1 vérifiant : $R(1)=\dfrac{1}{2}$ et $R(0)=1$.

b. Déterminer la fonction polynômiale Q de degré 1 vérifiant : $Q(-1)=\dfrac{1}{2}$ et $Q(0)=1$.

c. On note g la fonction affine par morceaux, définie sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par :

- pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, $g(x)=Q(x)$;
- pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $g(x)=R(x)$.

Tracer la courbe représentative de la fonction g sur le même graphique que précédemment.

d. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on a : $g(x)\leqslant f(x)$.

e. Calculer l'intégrale $I_g=\displaystyle\int_{-1}^{+1} g(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire une minoration de l'intégrale $I_f=\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Interpolation quadratique

Dans cette partie on cherche à approcher la fonction f par une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2.

a. Montrer que, s'il existe une fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 2 qui vérifie les relations suivantes :

$$P(-1)=f(-1),\quad P(0)=f(0),\quad P(1)=f(1),$$

alors elle est unique.

b. On considère les fonctions polynômiales L_{-1}, L_0 et L_1 définies pour tout réel x par :

$$L_{-1}(x)=\frac{1}{2}x(x-1),\ L_0(x)=-(x-1)(x+1)\ \text{ et }\ L_1(x)=\frac{1}{2}x(x+1).$$

Calculer pour tout entier i de $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$ et pour tout entier j de $\{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$ le réel $L_i(j)$.

c. On note P la fonction polynômiale définie pour tout nombre réel x par :

$$P(x) = f(-1)L_{-1}(x) + f(0)L_0(x) + f(1)L_1(x).$$

Prouver, sans expliciter la fonction P, que c'est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant les relations suivantes :

$$P(-1) = f(-1),\ \ , P(0) = f(0),\ \ P(1) = f(1).$$

d. Quel résultat peut-on énoncer à l'aide des questions 3. 1. et 3. 3.

e. Expliciter la fonction P et prouver que pour tout réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ on a :

$$f(x) \leqslant P(x).$$

f. Tracer, toujours sur le même graphique que précédemment, la courbe représentative de la fonction P.

g. Donner une majoration de l'intégrale $I_f = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

h. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de l'intégrale $I_f = \displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Soient $y_0,\ y_1,\ y_2$ trois nombres réels fixés.
On considère les fonctions polynômiales $L_0,\ L_1,\ L_{t,L2}$ définies de la façon suivante :
pour chaque entier i compris entre 0 et 2 et pour tout nombre réel x,

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq 1}^{2} \frac{(x-j)}{i-j}.$$

En appliquant une méthode analogue à celle mise en ceuvre à la question 3, prouver qu'il existe une unique fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout entier i de $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\}$, $P(i) = y_i$.

Partie II. Méthode de Newton

Soient $\left(y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3\right)$ quatre nombres réels fixés.
Dans cette partie, on se propose de déterminer quatre fonctions polynômiales P_0, P_1, P_2, P_3 telles que :

- P_0 est constante et vérifie : $P_0(0) = y_0$.
- P_1 est de degré inferieur ou égal à 1, $P_1(0) = y_0$ et $P_1(1) = y_1$.
- P_2 est de degré inférieur ou égal à 2, $P_2(0) = y_0,\ P_2(1) = y_1,\ P_2(2) = y_2$.
- P_3 est de degré inférieur ou égal à 3, $P_3(0) = y_0,\ P_3(1) = y_1,\ P_3(2) = y_2$ et $P_3(3) = y_3$.

Pour tout entier n de $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, si la fonction P_n, vérifie les propriétés correspondantes ci-dessus, on dira qu'elle vérifie la propriété $(\mathscr{E}_n)$.
On introduit maintenant les notations suivantes :

$\Delta^0 y_0 = y_0$			
	$\Delta^1 y_0 = y_1 - y_0$		
$\Delta^0 y_1 = y_1$		$\Delta^2 y_0 = \Delta^1 y_1 - \Delta^1 y_0$	
	$\Delta^1 y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$\Delta^0 y_2 = y_2$		$\Delta^2 y_1 = \Delta^1 y_2 - \Delta^1 y_1$	
	$\Delta^1 y_2 = y_3 - y_2$		
$\Delta^0 y_3 = y_3$			

1. **Premiers résultats**
   a. Expliciter l'unique fonction polynômiale P_0 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_0)$.
   b. Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale P_1 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_1)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :
   $$P_1(x) = \Delta_0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x.$$
   c. Calculer $\Delta^2 y_0$ et $\Delta^3 y_0$.
2. **Détermination de la fonction P_2**
   On suppose jusqu'à la fin de la question (II. 3.) que P_2 est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_2)$, et on note Q_2 la fonction polynômiale définie pour tout réel x par :
   $$Q_2(x) = P_2(x) - P_1(x).$$
   3. Que peut-on dire du degré de Q_2 ?
   4. Calculer $Q_2(0)$ et $Q_2(1)$. En déduire qu'il existe un réel c_2 tel que $Q_2(x) = c_2 x(x-1)$.
   5. Montrer que ce réel c_2 est égal à $\dfrac{\Delta^2 y_0}{2}$.
   6. Montrer que la fonction polynômiale P vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_2)$ peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :
   $$P_2(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \left(\Delta^2 y_0\right) \frac{x(x-1)}{2}.$$
7. **Détermination de la fonction P_3**
   En s'inspirant de la méthode précédente, justifier qu'il existe une fonction polynômiale P_3 vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_2)$ et qu'elle peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :
   $$P_3(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \left(\Delta^2 y_0\right) \frac{x(x-1)}{2} + \left(\Delta^3 y_0\right) \frac{x(x-1)(x-2}{3!}$$
   On admet que cette fonction P_3 est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété $(\mathscr{E}_3)$.

   Plus généralement, on peut prouver le théorème suivant, établi pour $n = 3$ à la question précédente et admis dans la suite de ce problème.
   Soit n un entier naturel strictement positif $(n > 0)$ et $\left(y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n\right)$ $n+1$ nombres réels.
   Il existe une unique fonction polynômiale P_n de degré inférieur ou égal à n vérifiant la propriété suivante :
   $$\textit{pour tout entier naturel } k \leqslant n,\ P_n(k) = y_k,$$
   et cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante, pour tout réel x :
   $$P_n(x) = \Delta^0 y_0 + \left(\Delta^1 y_0\right) x + \left(\Delta^2 y_0\right) \frac{x(x-1)}{2} + \cdots + \left(\Delta^n y_0\right) \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}.$$
   où la notation $\Delta^k y_0$ est définie par la relation de récurrence suivante :
   - *pour tout entier naturel $j \leqslant n$, $\Delta^0 y_j = y_j$ et*
   - *pour tout entier naturel non nul $k < n$ et pour tout entier naturel $j \leqslant n-k$,*
   $$\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j.$$

Partie III. Résolution d'une équation aux différences finies

Soit Q une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel.

Le but de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une fonction polynômiale P telleque $P(0) = \alpha$ et pour tout nombre réel x, $P(x+1) - P(x) = Q(x)$.
On dira d'une telle fonction P qu'elle vérifie la propriété $\left(C_{Q,\,\alpha}\right)$.

On rappelle qu'une fonction polynômiale de degré n (n entier $\geqslant 0$) qui admet $(n+1)$ racines distinctes est nulle.

On définit les fonctions polynômiales suivantes, pour tout réel x, par :

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = x,\ H_2(x) = \frac{x(x-1)}{2},\ H_3(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$$\text{et } H_4(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}.$$

1. Question préliminaire : cas particulier de la fonction nulle et unicité

a. Montrer pour tout réel α l'existence et l'unicité d'une fonction polynômiale P vérifiant la propriété (C 0,") dans le cas où Q estla fonction nulle.

b. Montrer que s'il existe une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $\left(C_{Q,\,\alpha}\right)$, alors elle est unique.

2. Cas général : analyse du problème

Soit Q une fonction polynômiale non nulle, de degré inférieur ou égal à 3, et α un réel.

On suppose dans cette partie I'existence d'une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $\left(C_{Q,\,\alpha}\right)$.

a. Prouver que P n'est pas une fonction constante.

b. On note m le degré de la fonction polynômiale P.

Prouver que le degré de la fonction polynômiale Q vérifiant, pour tout réel x l'égalité $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ est inférieur ou égal à $m-1$.

En déduire que m est inférieur ou égal à 4.

c. Prouver que P peut s'exprimer de façon unique sous la forme suivante, pour tout réel x :

$$P(x) = a_0 H_0(x) + a_1 H_1(x) + a_2 H_2(x) + a_3 H_3(x) + a_4 H_4(x).$$

On ne demande pas l'expression des coefficients a_k.

d. Calculer a_0.

e. Vérifier que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 4$, on a pour tout réel x :

$$H_k(x+1) - H_k(x) = H_{k-1}(x)$$

f. En déduire une expression de $Q(x)$ en fonction des a_k et des $H_k(x)$.

3. Synthèse

Soit Q une fonction polynômiale non nulle de degré inférieur ou égal à 3 et α un réel.

On note, pour tout entier naturel $j \leqslant 3$, $y_j = Q(j)$.

a. Justifier qu'il existe une fonction polynômiale P vérifiant la propriété $\left(C_{Q,\,\alpha}\right)$ et que cette fonction peut s'exprimer sous la forme suivante pour tout réel x :

$$P(x) = \alpha + \left(\Delta^0 y_0\right) H_1(x) + \left(\Delta^1 y_0\right) H_2(x) + \left(\Delta^2 y_0\right) H_3(x) + \left(\Delta^3 y_0\right) H_4(x).$$

b. En déduire qu'il existe une unique fonction polynômiale P vérifiant la propriété $\left(C_{Q,\,\alpha}\right)$.

Partie IV. Somme des puissance, 3^e^ des k premiers entiers

Le but de cette partie est de donner une formule, donnant pour tout entier naturel non nul k, la somme $\sigma_k = 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3$ (avec par convention $\sigma_0 = 0$).
Précisément on pose $\sigma_0 = 0$ et, pour tout entier naturel k, $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)^3$, ce qui est une définition par récurrence de la suite $\left(\sigma_k\right)_{k \geqslant 0}$.

On note Q la fonction polynômiale définie par $Q(x) = (x+1)^3$, et pour tout entier naturel $j \leqslant 3$, on note $y_j = Q(j)$.
On note P la fonction polynômiale qui vérifie :

$$P(0) = 0 \quad \text{et pour tout réel } x,\ P(x+1) - P(x) = Q(x).$$

1. Montrer que pour tout entier naturel k non nul, on à $\sigma_k = P(k)$.
2. En déduire une expression de σ_k,utilisant la notation $\Delta^k y_0$.
3. Calculer $\Delta^k y_0$ pour tout entier k compris entre 0 et 3.
4. Donner une expression simple de la somme $\Delta^k y_0$ en détaillant les calculs.

FIN