6

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Pour répondre à la demande de nombreux lecteurs, cette rubrique comprend désormais deux parties.

La première ("PROBLEMES") poursuit la publication d'énoncés inédits avec leurs solutions.

La deuxième ("OLYMPIADES") est consacrée aux exercices déjà posés (en particulier aux diverses Olympiades), ou publiés qui, par leur caractère insolite, incitent à la recherche de solutions.

Les énoncés et les solutions doivent être adressés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont II
Département de Mathématiques Pures
B.P. 45
63170 AUBIERE

I. Problèmes

ENONCES

Enoncé n° 78 (CHONE, Thiers)

Dans un espace affine euclidien de dimension n, on considère $n+1$ demi-droites distinctes issues du même point, telles que les C^2_{n+1} angles qu'elles déterminent deux à deux aient même mesure. Déterminer cette mesure commune.

Enoncé n° 79 (FRAISSE, Ferals les Corbières)

Résoudre dans **Z**

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$$

SOLUTIONS

Enoncé n° 70 (IREM de Bordeaux)

Sur une droite D, on trouve trois points A, B et C tels que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ soit un rationnel $\frac{p}{q}$ connu. Soit P un point n'appartenant pas D. Donner une construction avec la règle seule de la parallèle à D passant par P.

Solution (LEMAIRE, Douai)

Si C divise le bipoint (A,B) dans le rapport k

alors C divise le bipoint (B,A) dans le rapport $\frac{1}{k}$

A divise le bipoint (B,C) dans le rapport $\frac{k-1}{k}$

A divise le bipoint (C,B) dans le rapport $\frac{k}{k-1}$

B divise le bipoint (C,A) dans le rapport $\frac{1}{1-k}$

B divise le bipoint (A,C) dans le rapport $1-k$

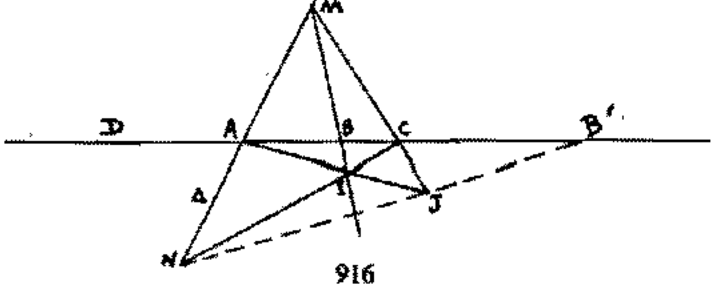
De ces 6 rapports, deux sont supérieurs à 1.

Quitte à changer l'appellation des trois points, nous pouvons supposer que C divise (A,B) dans un rapport supérieur à 1, que nous notons k.

Soit B' le conjugué harmonique de B par rapport à A et C. Il divise donc (A,C) dans le rapport $k-1$.

Il est facile de construire B' : sur une droite Δ passant par A et distincte de D, nous choisissons deux points quelconques M et N. Nous excluons seulement les positions de M et N qui impliqueraient, pour des raisons de parallélisme, l'inexistence des points I, ou J, que nous définissons maintenant : I est l'intersection des droites MB et NC, et J, celle de AI et MC.

Si $k \neq 2$, la droite NJ rencontre AC, et l'intersection est *le point B'* : on reconnait en effet, en MB, la *polaire de B'* par rapport aux sécantes MA et MC.



1°) Considérons alors le cas particulier $k = 2$. B est milieu de (A,C), et son conjugué harmonique par rapport à A et C n'existe plus.

Si nous choisissons pour droite $\triangle$ celle qui passe par P, et si N est le point P, la construction précédente nous donne, *en PJ, la parallèle menée de P à la droite D.*

2°) Première généralisation : *k est un entier supérieur à 2.*

En construisant B', conjugué de B par rapport à (A,C), nous obtenons le point divisant (A,C) dans le rapport $k' = k-1$.

Si $k' > 2$, il est aussi facile de construire le conjugué harmonique C' de C par rapport à (A,B') ; C' divise le bipoint (A,B') dans le rapport $k'' = k'-1 = k-2$.

Nous obtenons ainsi, en réitérant la méthode, une suite décroissante d'entiers k, k', k'',..., $k^{(n)} = 2$. La dernière valeur, $k^{(n)} = 2$, correspond, bien sûr, à l'obtention possible de la parallèle menée de P à D.

3°) Seconde généralisation : *k est un nombre fractionnaire.*

Comme précédemment, nous pouvons supposer, quitte à changer l'appellation des points, que C divise (A,B) dans un rapport compris entre 0 et 1, que nous notons k ; $k = \dfrac{p}{q}$ avec p *et* q, premiers entre eux, *tels que* $0 < p < q$.

Construisons le conjugué A' de A par rapport à (C,B) : A' divise (C,B) dans le rapport $k' = \dfrac{k}{1-k} = \dfrac{p}{q-p}$.

Si $q-p > p$, poursuivons par la construction de C', conjugué de C par rapport à (A',B) : C' divise (A',B) dans le rapport
$k'' = \dfrac{k'}{1-k'} = \dfrac{p}{q-2p}$,...., et ainsi de suite, tant que le dénominateur $q-np$ est supérieur ou égal à p. *S'il arrive que, pour un entier n, $q-np = 1$, nous sommes ramenés au cas de la première généralisation.*

Si n est tel que $1 < q-np < p$, considérons le rapport inverse $K = \dfrac{q-np}{p}$. A ce stade de la construction, nous sommes en possession de 3 points, dont l'un divise les deux autres dans le rapport K. Puisque K est tel que $0 < K < 1$, nous pouvons recommencer à propos de ce rapport les considérations faites à propos de k,..., et ainsi de suite.

Remarquons que le numérateur et le dénominateur de la fraction $K = \dfrac{q-np}{p}$ sont respectivement inférieurs à ceux de $k = \dfrac{p}{q}$. Il arrive donc fatalement un moment où nous obtenons une fraction de dénominateur égal à 1, et *nous sommes ramenés au 2°).*

En conclusion, *la construction de la parallèle à D, passant par P, est possible avec la règle seule, quel que soit le rapport rationnel $\dfrac{p}{q}$ donné.*

Exemple ① $k = \frac{3}{5}$. Nous avons la chaîne :

$$\frac{3}{5} \to \frac{3}{5-3} = \frac{3}{2} \longrightarrow \frac{2}{3} \to \frac{2}{3-2} = 2.$$

A partir de A,B,C tels que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{3}{5}$, nous construisons A$'$, conjugué de A par rapport à (C,B) : A$'$ est tel que $\frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} = \frac{3}{2}$, ou ou $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{2}{3}$.

A partir de B,C,A$'$, nous construisons B$'$, conjugué de B par rapport à (A$'$,C) ; B$'$ est tel que $\frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C}} = \frac{2}{1} = 2$.

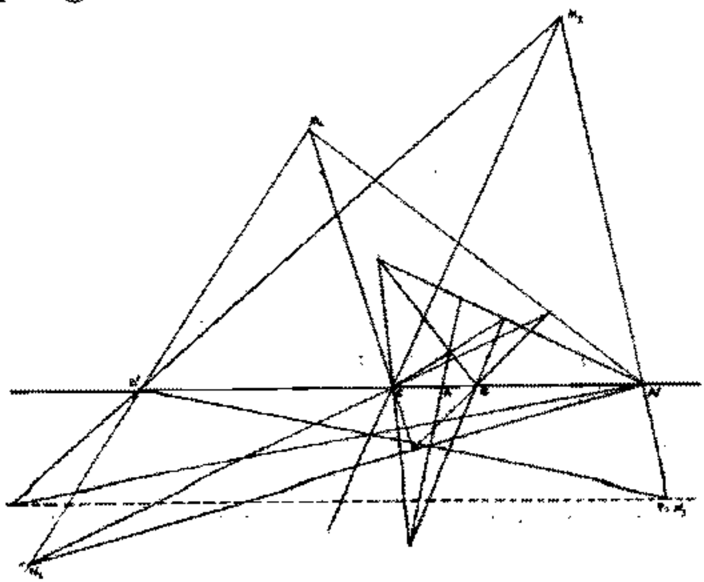
Le conjugué C$'$ de C par rapport à (A$'$,B$'$) est le point de l'infini de la droite D.

Exemple ② Si nous avions $k = 2,7$, nous considérerions de même la chaîne :

$$\frac{27}{10} \to \frac{10}{27} \to \frac{10}{17} \to \frac{10}{7} \to \frac{7}{10} \to \frac{7}{3} \to \frac{3}{7} \to \frac{3}{4} \to 3 \to 2.$$

Autres solutions : CUCULIERE (Paris) qui donne un programme sur HP25 calculant la suite des opérations à effectuer, LAILLET (Givry), TISSIER (Montfermeil) et l'auteur.

Exemple ① : Construction



Enoncé n° 72 (LEMAIRE, Douai)

On donne six entiers naturels non nuls. En utilisant au plus une fois chaque entier et les quatre opérations élémentaires, quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir ? (Jeu des chiffres et des lettres).

Solution de l'auteur

Supposons $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant f$

Après avoir remarqué que l'utilisation des 6 entiers a,b,c,d,e,f est naturellement impérative, énonçons trois règles :

I. En remplaçant dans un calcul chaque somme d'entiers supérieurs à 1 par leur produit, on obtient un résultat supérieur, ou égal.

$$\left.\begin{array}{l}A \geqslant 2\\ B \geqslant 2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}AB \geqslant 2B\\ AB \geqslant 2A\end{array}\right\} \Rightarrow AB \geqslant A+B$$

II. Afin d'optimaliser le résultat d'un calcul, chaque entier égal à 1 ne doit intervenir directement que par addition.

$$\text{évident : } A+1 > 1A$$

III. Etant donnés deux facteurs A,B, supérieurs à 1, et le nombre 1, c'est en ajoutant 1 au plus petit des facteurs que l'on obtient le plus grand résultat à partir de A,B et 1.

$$1 < A \leqslant B \Rightarrow (A+1)B \geqslant A(B+1) > AB+1$$

Ces règles permettent la comparaison immédiate de la plupart des résultats obtenus à partir de six entiers a,b,c,d,e,f fixés.

Différents cas sont à distinguer :

1°) $1 < a$. On a directement $N = abcdef$, d'après la règle I.

2°) $1 = a < b$. $bcdef$ est le plus grand nombre formé avec ces cinq entiers (règle I), donc $N = (b+1)cdef$, d'après les règles II et III.

3°) $1 = a = b < c$ (Il est clair que $(1+1+c)def \leqslant (1+1)cdef$, d'après la règle I).

Comparons $(1+1)cdef$ et $(1+c)(1+d)ef$. Cela revient à comparer $2\,cd$ et $(1+c)(1+d) = 1+cd+c+d$, soit cd et $c+d+1$:
si $c<d$, on a $c+1 \leqslant d$, donc $c+d+1 \leqslant 2d$
or, par hypothèse, $c \geqslant 2$, d'où $c+d+1 \leqslant cd$
si $c=d$, il faut comparer c^2 et $2c+1$:
si $c=2$, il vient $c^2 < 2c+1$
si $c \geqslant 3$ $\quad c^2 > 2c+1$.

En résumé $2cd \geqslant (c+1)(d+1)$ sauf si $c=d=2$.

4°) $1=a=b=c < d$ (Il est clair que $(1+1)(1+d)ef \leqslant (1+1+1)def$, d'après la règle III ; de même $(1+1+1+d)ef \leqslant (1+1+1)def$, d'après la règle I ; de même $(1+1+d)(1+e)f \leqslant (1+1)d(1+e)f \leqslant (1+1+1)def$).

Comparons $(1+1+1)def$ et $(1+d)(1+e)(1+f)$. Cela revient à comparer

$$3\,def \qquad \text{et} \qquad 1+d+e+f+de+ef+fd+def\,.$$

si $d \neq f$, on a

$$(1+d)(1+e)(1+f) \leqslant (1+1+d)(1+e)f \leqslant (1+1)d(1+e)f$$
$$\leqslant (1+1)(1+d)ef \leqslant (1+1+1)def$$

si $d=f\ (=e)$, on a

$$(1+1+1)def = 3\,d^3 \qquad \text{et} \qquad (1+d)(1+e)(1+f) = (1+d)^3\,.$$

Or, si $d=2$, $\qquad 3\,d^3 < (1+d)^3$

et, si $d \geqslant 3$, $\qquad 3\,d^3 > (1+d)^3$.

En définitive, $(1+1+1)def \geqslant (1+d)(1+e)(1+f)$ sauf si $d=e=f=2$.

5°) $1=a=b=c=d<e$

$(1+1)(e+1)(f+1) \leqslant (1+1+1)(e+1)$, d'après la règle III.

Comparons $(1+1+1+1)ef$ et $(1+1+1)(e+1)f$,

soit $\quad 4e \quad$ et $\quad 3e+3 \quad$, $\quad$ ou $\quad e \quad$ et $\quad 3$:

si $e \geqslant 3$, on a $(1+1+1+1)ef \geqslant (1+1+1)(e+1)f$

si $e=2$ $\qquad (1+1+1+1)ef < (1+1+1)(e+1)f$.

6°) $1=a=b=c=d=e<f$.

Il est clair que $(1+1+1)(f+1+1) \leqslant (1+1+1)(1+1)f$, d'après la règle 1.

Comparons $(1+1+1+1)(f+1)$ et $(1+1)(1+1+1)f$,

soit $\quad 4f+4 \quad$ et $\quad 6f$, $\quad$ ou $\quad 4 \quad$ et $\quad 2f$:

comme $f \geqslant 2$, on voit que $N = (1+1)(1+1+1)f$.

7°) $1=a=b=c=d=e=f \qquad N=(1+1+1)(1+1+1)$ supérieur à $(1+1)(1+1)(1+1))$.

Conclusion :

Pour $1<a$, $N = \boxed{abcdef}$

pour $1=a<b$, $N = \boxed{(b+1)cdef}$

pour $1=a=b<c$, $N=(1+1)cdef = \boxed{2\,cdef}$, sauf si $c=d=2$,

auquel cas $N = \boxed{(c+1)(d+1)ef}$

pour $1=a=b=c<d$, $N = (1+1+1)def = \boxed{3\ def}$, sauf si

$d=e=f=2$, auquel cas $N = \boxed{(d+1)(e+1)(f+1)}$

pour $1=a=b=c=d<e$, $N = (1+1+1+1)ef = \boxed{4\,ef}$, sauf si

$e=2$, auquel cas $N = (1+1+1)(e+1)f = \boxed{3(e+1)f}$

pour $1=a=b=c=d=e<f$, $N = (1+1)(1+1+1)f = \boxed{6\,f}$

pour $1=a=b=c=d=e=f$, $N = (1+1+1)(1+1+1) = \boxed{9.}$

Autre solution : TISSIER (Montfermeil) qui étudie le cas de n nombres.

II. Olympiades

ENONCES

Exercice n° 5

Calculer $S = \Sigma \frac{1}{pq}$

les entiers p et q vérifiant

$$1 \leqslant p < q \leqslant n \quad , \quad p+q > n \quad , \quad \text{PGCD}(p,q) = 1$$

SOLUTIONS

Exercice 2 (CAPES)

On donne, dans un plan affine euclidien, n points $P_1,\dots,P_n$ et un cercle C de rayon 1. Démontrer qu'il existe un point de C dont le produit des distances aux P_i est supérieur ou égal à 1.

Solution (AUQUE, Clermont-Ferrand)

Prenons pour origine le centre du cercle et utilisons la représentation par les nombres complexes.

Désignons par z_j l'affixe de P_j et par z l'affixe d'un point M.

Soient $t_1,\dots,t_{n+1}$ les racines $n+1^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$.

On a $\sum_{j=1}^{n+1} t_j^p = 0$ si $1 \leqslant p \leqslant n$, d'où

$$n+1 = \sum_{j=1}^{n+1} t_j P(t_j) \leqslant \sum_{j=1}^{n+1} |P(t_j)| .$$

Donc il existe j tel que $|P(t_j)| \geqslant 1$.

Comme $|P(z)| = \prod_{k=1}^{n} MP_k$, l'un des points dont l'affixe est une racine $n+1^{\text{ième}}$ convient.

Autres solutions : LAILLET (Givry) qui calcule $\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\, dt$ et VIDIANI (Annecy) qui signale de plus que le principe du maximum donne immédiatement la réponse.