9

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Les propositions d'énoncés (avec la solution dans la mesure du possible) et les solutions aux problèmes posés dans le Bulletin doivent être adressés à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

ÉNONCÉS

Enoncé n° 70 (IREM de Bordeaux)

Sur une droite D, on trouve trois points A, B et C tels que $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ soit un rationnel $\frac{p}{q}$ connu.

Soit P un point n'appartenant pas à D. Donner une construction avec la ***règle seule*** de la parallèle à D passant par P.

Enoncé n° 71 (GAGNAIRE, Bron)

Quelle est la plus petite puissance de 6 dont l'écriture, en base *dix*, commence par un 9 ?

Enoncé n° 72 (LEMAIRE, Douai)

On donne six entiers naturels non nuls. En utilisant au plus une fois chaque entier et les quatre opérations élémentaires, quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir ? (Jeu des chiffres et des lettres).

SOLUTIONS

Enoncé n° 60 (AUQUE, Clermont-Ferrand)

Démontrer que pour tout couple (a,n) d'entiers naturels strictement positifs, il existe un entier naturel r et une suite $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r$ de nombres valant $+1$ ou -1 tels que

$$a = \sum_{k=1}^{r} \epsilon_k k^n$$

Solution (GAUDET et CONSTANTIN, Québec)

Théorème 1 Si a, n sont des entiers naturels, alors il existe N entier strictement positif et ϵ_k valant $+1$ ou -1 tels que

$$a = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k k^n$$

La démonstration utilise deux lemmes et quelques définitions.

Définition On pose $\delta_1 = 1$ et inductivement

$$\delta_{2^m+p} = -\delta_p$$

pour $p = 1, 2, 3, \ldots, 2^m$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

La suite $\{\delta_k\}$ commence donc ainsi :

$\{1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, \ldots\}$.

Noter que les 2^n premières valeurs de δ_k sont les valeurs de la n^e fonction de Walsh.

Lemme 1 L'égalité

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k (N+k)^n = (-1)^n \, 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \, n!$$

est valide pour tous n, N entiers naturels.

Démonstration :

On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, l'égalité $(*)$ se réduit facilement à $\delta_1 = 1$.

Supposons maintenant $(*)$ vraie pour les valeurs inférieures ou égales à n. Alors

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \delta_k (N+k)^{n+1} = \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k (N+k)^{n+1} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \delta_k (N+k)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k (N+k)^{n+1} - \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k (N+k+2^n)^{n+1}$$

(par la définition inductive de δ_k).

$$= \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \left(k^j N^{n+1-j} - k^j (N+2^n)^{n+1-j}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} \left(N^{n+1-j} - (N+2^n)^{n+1-j}\right) \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k k^j.$$

Or, pour $j \leqslant n-1$, l'hypothèse de récurrence nous permet, utilisant

la définition de δ_k, de montrer que $\sum_{k=1}^{2^n} \delta_k k^j = 0$.

Il ne reste donc que les termes avec $j = n$ et $j = n+1$ à considérer.

Pour $j = n+1$, la contribution est nulle à cause du terme $N^{n+1-j} - (N+2^n)^{n+1-j}$ qui est zéro.

Nous avons donc

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \delta_k (N+k)^{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!\,1!} \left(N - (N+2^n)\right) \sum_{k=1}^{2^n} \delta_k k^n$$

$$= (n+1)(-2^n)\left((-1)^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\right)$$

$$= (-1)^{n+1} 2^{n+\frac{n(n-1)}{2}} (n+1)!$$

$$= (-1)^{n+1} 2^{\frac{(n+1)n}{2}} (n+1)!$$

Définition : On pose

$$\alpha_n = (-1)^n 2^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$$

Lemme 2 Soit n naturel donné ; alors, pour tout M naturel, il existe μ_k valant $+1$ ou -1 avec

$$(**) \qquad \sum_{k=M+1}^{M+\alpha_n} \mu_k k^n \equiv 2 \ (\text{modulo } \alpha_n).$$

Démonstration

Puisque, modulo α_n, tous les nombres $0, 1, \ldots, \alpha_n - 1$ apparaissent exactement une fois comme valeurs de k dans la somme (**), on peut choisir μ_k de la façon suivante :

a) Si n est pair.

Alors, pour $k = 2, \ldots, \frac{\alpha_n}{2} - 1$ (modulo α_n), on peut prendre

$\mu_k = 1$ et pour $k = \frac{\alpha_n}{2} + 1, \ldots, \alpha_n - 2$, on prend $\mu_k = -1$; pour $k = 0$ et $k = \frac{\alpha_n}{2}$, le choix de μ_k n'a aucune conséquence sur la somme modulo α_n ; pour $k = 1$ et $k = \alpha_n - 1$, on prend $\mu_k = 1$. La somme est équivalente à 2 modulo α_n car $k = 2$ s'annulera avec $k = \alpha_n - 2$, $k = 3$ avec $k = \alpha_n - 3$ et ainsi de suite.

b) Si n est impair.

Alors, pour $k = 2, \ldots, \frac{\alpha_n}{2} - 1, \frac{\alpha_n}{2} + 1, \ldots, \alpha_n - 2$, on peut prendre $\mu_k = 1$; pour $k = 1$, on prend $\mu_k = 1$ et pour $k = \alpha_n - 1$, on prend $\mu_k = -1$; pour $k = 0$ et $k = \frac{\alpha_n}{2}$, le choix de μ_k n'a aucune conséquence sur la somme modulo α_n. Comme dans le cas où n est pair, les termes valent 0 ou s'annulent deux par deux, sauf pour $k = 1$ et $k = \alpha_n - 1$ et on a choisi leurs signes pour donner une somme 2 modulo α_n.

Noter finalement que si $n \geqslant 2$, alors α_n est pair et

$$\left|\frac{\alpha_n}{2}\right|^n = 2^{\frac{n^2(n-1)}{2} - n} (n!)^n$$

Ceci est toujours divisible par α_n car $\frac{n^2(n-1)}{2} - n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$

pour $n \geqslant 3$; pour $n = 2$, on a $\alpha_n = 4$ et $\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)^n = 4$.

Les cas $n = 0$ et $n = 1$ sont triviaux.

Nota : Pour M et n données, il existe au moins $2^{\frac{\alpha_n}{2}}$ façons de choisir μ_k pour obtenir (**).

Démonstration du Théorème 1

Pour représenter un pair $a = 2b$, on fait une succession de b blocs du genre (**)

$$\sum_{1}^{\alpha_n} + \sum_{\alpha_n+1}^{2\alpha_n} + \ldots + \sum_{(b-1)\alpha_n+1}^{b\alpha_n}$$

Ceci nous donnera une somme équivalente à $2b$ (modulo α_n). Il suffit d'ajouter ou de soustraire le bon nombre de blocs du genre (*) pour donner le bon élément de cette classe d'équivalence.

Pour représenter un impair $a = 2b + 1$, il s'agit seulement de commencer par $(+1)1^n$, y ajouter b blocs du genre (**) pour obtenir un élément de la classe d'équivalence $[2b + 1]$ et ensuite y ajouter ou en soustraire le bon nombre de blocs du genre (*).

Utilisant ces mêmes deux lemmes, et tenant compte de la parité de P, on peut facilement démontrer un résultat plus fort.

Théorème 2 Soient a, n entiers naturels et P un entier positif. Alors il existe $N \geqslant P$ et ϵ_k valant $+1$ ou -1 avec

$$a = \sum_{k=P}^{N} \epsilon_k k^n$$

Il est clair que la démonstration ne donne pas la façon la plus efficace de choisir N et ϵ_k. Il serait donc intéressant de trouver un majorant $N(a)$ pour le plus petit entier N permettant d'obtenir la représentation

$$a = \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k k^n$$

Par exemple, si $n = 2$:

$1 = 1^2$
$2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$
$3 = -1^2 + 2^2$
$4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$

Utilisant (*) pour représenter $a \geqslant 5$, on obtient

$$N(a) \leqslant a + 2 \qquad (n = 2) .$$

Autres solutions : AMON (Limoges), FRAISSE (Lézignan), LEMAIRE (Douai) et l'auteur.