7

LES PROBLEMES DE L'A.P.M.E.P.

Les propositions d'énoncés (avec la solution dans la mesure du possible) et les solutions aux problèmes posés dans le Bulletin doivent être adressées à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques pures
B.P. 45 — 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 67 (GAUTHIER, Perpignan)

Pour quelles valeurs du naturel n la fraction $\dfrac{2n^7+1}{3n^3+2}$ est-elle simplifiable ?

Enoncé n° 68 (LEMAIRE, Douai)

On donne un triangle ABC du plan affine euclidien. Où doit être situé le point M pour que l'aire du triangle dont les sommets sont les symétriques de M par rapport aux côtés du triangle ABC soit égale à l'aire du triangle ABC ?

Enoncé n° 69 (FULGENCE, Dijon)

n chevaux ($n \geq 3$) numérotés de 1 à n participent à une course comptant pour le tiercé. Un tiercé est dit additif si, parmi les numéros des trois premiers arrivés, l'un est la somme des deux autres. Tous les chevaux ayant a priori d'égales possibilités, quelle est la probabilité pour que le tiercé soit additif ?

SOLUTIONS

Enoncé n° 61 (JULLIEN, Grenoble)

Une suite numérique (u_n) est dite p-triée ($p \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} \geqslant u_n$.

p-trier une suite finie consiste, pour $r = 0, 1, \ldots, p-1$, à réordonner les termes d'indice $r + kp$ de sorte qu'ils forment une suite croissante. Démontrer que si l'on q-trie une suite p-triée, elle reste p-triée.

Solution (LEMAIRE, Douai)

Si q est multiple de p, une suite p-triée est automatiquement q-triée. Si p est multiple de q, le théorème est également évident : si l'on q-trie une suite p-triée, la suite q-triée obtenue est automatiquement p-triée. Nous supposerons que p n'est pas multiple de q, ni q multiple de p.

Démontrons d'abord le *lemme* :
Soit une suite numérique finie (a_i), ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) croissante, et soit (b_i), ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) une suite majorante de (a_i) (c'est-à-dire telle que $a_i \leqslant b_i$ pour tout indice i). Si l'on ordonne les termes de (b_i) par ordre de valeurs croissantes, on obtient une suite (c_i) majorante de (a_i).

En effet, soit un terme a_k, de rang quelconque k, de la première suite. On a $a_k \leqslant b_i$ quel que soit $i = k, k+1, \ldots, n$.

On voit qu'il y a au moins $n - k + 1$ termes b_i supérieurs ou égaux à a_k, donc il y a au plus k termes b_i inférieurs à a_k.

Par conséquent, le terme c_k, de rang k, de la suite (c_i) obtenue à partir de (b_i), est supérieur ou égal à a_k.

Soit maintenant (u_i), ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) une suite p-triée, c'est-à-dire $u_k \leqslant u_{k+p}$ pour tout indice $k \in \{0, 1, \ldots, n-p\}$.

Lorsque nous q-trions une telle suite, les termes u_k et u_{k+p}, pour une valeur de k fixée arbitrairement, sont — éventuellement — remplacés par des termes appartenant respectivement aux sous-suites :

$$\ldots, u_{k-3q} \ , \ u_{k-2q} \ , \ u_{k-q} \ , \ u_k \ , \ u_{k+q} \ , \ u_{k+2q} \ , \ldots \quad (1)$$

$$\ldots, u_{k+p-3q} \ , \ u_{k+p-2q} \ , \ u_{k+p-q} \ , \ u_{k+p} \ , \ u_{k+p+q} \ , \ u_{k+p+2q} \ldots \quad (2)$$

Puisque nous supposons que p n'est pas multiple de q, ni q multiple de p, aucun terme de la suite (u_i) n'appartient à la fois aux deux suites précédentes (1) et (2).

Chaque terme de la suite (1) est inférieur ou égal au terme de la suite (2) écrit juste en dessous :

$$u_{k+jq} \leqslant u_{k+p+jq}$$

Il se peut que la suite (2) comporte moins de termes que la suite (1). Dans ce cas, nous lui adjoindrons temporairement un nombre suffisant de termes supplémentaires dont les valeurs seront choisies supérieures à toutes celles des termes de la suite (u_i). Ces termes supplémentaires, rangés par ordre croissant, auront les indices, de la forme $k+p+jq$, qui viennent régulièrement après ceux des derniers termes de la sous-suite (2).

Si nous ordonnons alors les deux suites (1) et (2) — cette dernière éventuellement complétée de façon à avoir le même nombre de termes que (1) — dans l'ordre croissant de la valeur de leurs termes, nous formons deux suites que nous indiçons respectivement avec les mêmes indices que les suites (1) et (2) :

$\ldots, v_{k-3q}, \ldots, v_k, \ldots$

$\ldots, v_{k+p-3q}, \ldots, v_{k+p}, \ldots$ et d'après le lemme, nous avons

$$v_k \leqslant v_{k+p} .$$

Remarquons que les termes que nous avons adjoints, le cas échéant, à la suite (2), ont gardé leur rang. Nous les supprimons.

Si nous procédons ainsi avec les sous-suites semblables à (1), mais comportant respectivement les termes $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots$ jusqu'à u_{k+q-1} (en exceptant la suite (2) déjà ordonnée), nous épuisons tous les termes de la suite (u_i), chacun n'ayant été utilisé qu'une fois, et nous obtenons, après avoir réindicé les termes u_i et rassemblé les nouveaux termes y_i, une suite (v_i), $(i \in \{0,1,\ldots,n\})$ telle que

$$v_k \leqslant v_{k+p} \qquad \forall k \in \{0,1,\ldots,n-p\}.$$

Cette suite, q-triée par construction, est donc également p-triée.

Autre solution : FRAISSE (Lezignan)

Enoncé n° 62 (EHRHART, Strasbourg)

Combien y a-t-il de matrices 4×4 symétriques par rapport à chaque diagonale, dont les éléments sont des naturels non nuls tels que la somme des éléments de chaque ligne ou colonne soit égale au naturel donné n ?

Solution (FULGENCE, Dijon)

Il faut évidemment $n \geqslant 4$.

La condition imposée à la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$ s'écrit

$$\begin{cases} a+b+c+d=n \\ b+e+f+c=n \end{cases} \qquad \text{soit :} \qquad \begin{cases} (b+c)+(a+d)=n \\ e+f=a+d \end{cases}$$

A chacun des couples (p,q) $(p \geqslant 2,\ q \geqslant 2)$ vérifiant $p+q=n$, on peut associer $(p-1)$ couples (b,c) $(b \geqslant 1,\ c \geqslant 1)$ vérifiant $b+c=p$, $(q-1)$ couples (a,d) $(a \geqslant 1,\ d \geqslant 1)$ vérifiant $a+d=q$, et $(q-1)$ couples (e,f) $(e \geqslant 1,\ f \geqslant 1)$ vérifiant $e+f=q$.

Le nombre de sextuplets (a,b,c,d,e,f) cherché est donc :

$N_n = \sum_{\substack{2 \leqslant q \leqslant n-2 \\ p+q=n}} (q-1)^2 (p-1)$, soit, en posant $r=q-1$,

$$N_n = \sum_{r=1}^{r=n-3} r^2(n-2-r)$$

Les formules de sommation classique $\sum_1^k r^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ et $\sum_1^k r^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ fournissent alors :

$$\boxed{N_n = \frac{1}{12}(n-1)(n-2)^2(n-3)}$$

Remarques : Le problème n'est pas plus simple dans le cas de matrices 3×3, où la présence d'un élément central oblige à faire intervenir la parité de n et à restreindre les variations de l'indice de sommation (c'est le cas pour tout ordre de matrice impair). On trouve :

$$N_n = \frac{(n-2)(3n-4)}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{(n-1)(3n-5)}{8}$$

selon que n est pair ou impair.

A partir de l'ordre 5, les divers indices de sommation voient aussi leurs variations restreintes de façon complexe, et les formules sommatoires auxquelles on aboutit pour les ordres 5 et 6 sont déjà impressionnantes...

Autres solutions : AIDI (Salammbo, TUNISIE) ; BAUVAL (Montrouge) ; BIGOT (Equeudreville) ; BILGOT (Le Puy) ; CARREGA (Lyon) ; FRAISSE (Lézignan) ; INGARAO (Meknès) ; LAFRANCHI (Grenoble) ; LELOUSTRE (Salon de Provence) ; LEMAIRE (Douai) ; LEYROLLE (La Roche sur Yon) ; MERRIEN (Rennes) ; NOE (Marseille) ; QUENTON (Madrid) et l'auteur.