9

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Rubrique des problèmes de l'APM

Cette rubrique est pour le plaisir, celui qui nous fait choisir les mathématiques à vingt ans, et non directement pour notre enseignement.

Le niveau ne doit pas excéder celui des classes préparatoires ou des deux premières années de faculté. Un certain caractère d'originalité dans l'énoncé est souhaité, ce qui exclut, en particulier, les applications immédiates de théorèmes classiques, ou les problèmes déjà parus dans d'autres revues.

Si l'auteur d'un énoncé n'est pas en mesure d'en donner la solution, il doit accompagner son envoi du maximum d'informations concernant le problème, afin d'aider les responsables de la rubrique. Un astérisque signale un problème dont la solution n'est pas connue de ceux-ci. Le Bulletin publie les meilleures solutions.

Enoncés et solutions sur feuilles séparées et tapées à la machine S.V.P. N'oubliez pas de signer. Toute correspondance concernant la rubrique est à adresser à :

Charles AUQUE
Université de Clermont-Ferrand
Mathématiques Pures
B.P. 45 - 63170 AUBIERE

ENONCES

Enoncé n° 46 (REISZ, Auxerre)

Dans un espace affine euclidien de dimension finie, quatre points distincts A, B, C, D vérifient :

(I) $d(A,B) < d(A,C) < d(A,D)$
(II) $d(D,C) < d(D,B) < d(D,A)$

En déduire que les projections orthogonales de A, B, C, D sur la droite AD sont placées dans l'ordre A, p(B), p(C), D.

Enoncé n° 47 (LEGRAND, Bordeaux)

f et h étant deux fonctions numériques définies et continues sur $[a, +\infty[$ vérifiant les hypothèses suivantes :

f est dérivable sur $]a, +\infty[$
$h > 0$
$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{h(t)} = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + h(x) f'(x)] = \lambda$

démontrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda$; si en outre on suppose que $\lim_{x \to +\infty} h(x) > 0$, établir que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Enoncé n° 41 (E. EHRHART, Strasbourg)

Les inconnues x, y et le paramètre n étant des naturels strictement positifs, combien de solutions a le système $2x - y < 3n, \quad x < n(x-y)$?

Solution (G. COQUET, Valenciennes)

Posons $z = x - y$. Il s'agit de déterminer le nombre N de couples (x, z) formés de naturels vérifiant :

$$(I) \quad \begin{cases} x + z < 3n & (1) \\ x < nz & (2) \\ x > z & (3) \\ z > 0 & (4) \end{cases}$$

On remarque que, si $z \geqslant 3$, alors tout couple (x, z) vérifiant (1) et (4) vérifie (2). On est conduit à envisager les trois cas suivants :

Premier cas : $z = 1$.

(2) et (3) sont compatibles si et seulement si $n \geqslant 3$; dans ce cas, si (2) est vérifiée, (1) l'est aussi. Désignons par N_1 le nombre de couples (x, 1) vérifiant (I). On a :

$$\begin{cases} n = 1 \text{ ou } 2 & \Rightarrow \quad N_1 = 0 \\ n \geqslant 3 & \Rightarrow \quad N_1 = n - 2. \end{cases}$$

Deuxième cas : $z = 2$.

(2) et (3) sont compatibles si et seulement si $n \geqslant 2$; en outre, lorsque $n > 2$, si (2) est vérifiée, (1) l'est aussi. Désignons par N_2 le nombre de couples (x, 2) vérifiant (I). On a :

$$\begin{cases} n = 1 & \Rightarrow \quad N_2 = 0 \\ n = 2 & \Rightarrow \quad N_2 = 1 \\ n \geqslant 3 & \Rightarrow \quad N_2 \geqslant 2n - 3. \end{cases}$$

Troisième cas : $z \geqslant 3$.

Le système (I) devient :

$$\begin{cases} x + z \leqslant 3n - 1 & (1) \\ \quad x \geqslant z + 1 & (3) \end{cases}$$

Puisque $z \geqslant 3$, (1) et (3) sont compatibles si et seulement si $n \geqslant 3$. Désignons par N_3 le nombre de couples (x, z) (avec $z \geqslant 3$) vérifiant (I). On a :

$$n = 1 \text{ ou } 2 \quad \Rightarrow \quad N_3 = 0.$$

Supposons maintenant $n \geqslant 3$. Pour que (x, z) soit solution de (I), il est nécessaire que $z \leqslant \frac{3n}{2} - 1$. Distinguons deux cas :

a) *n pair :* $n = 2p$ $(p \geqslant 2)$.

Pour tout z tel que $3 \leqslant z \leqslant 3p - 1$, (x, z) est solution de (I) si et seulement si $z + 1 \leqslant x \leqslant 6p - 1 - z$. On a donc :

$$N_3 = \sum_{z=3}^{3p-1} (6p-1-2z) = (6p-7) + (6p-9) + \ldots + 3 + 1 = (3p-3)^2$$

b) *n impair :* $n = 2p + 1$ $(p \geqslant 1)$.

Pour tout z tel que $3 \leqslant z \leqslant 3p$, (x, z) est solution de (I) si et seulement si $z + 1 \leqslant x \leqslant 6p + 2 - z$. On a donc :

$$N_3 = \sum_{z=3}^{3p} (6p+2-2z) = (6p-4) + (6p-6) + \ldots + 4 + 2 = (3p-2)(3p-1)$$

Résumé : (On a $N = N_1 + N_2 + N_3$).

$$\begin{cases} n = 2p + 1 \ (p \geqslant 0) & \Rightarrow \quad N = 3p\,(3p - 1) \\ n = 2p \quad\quad (p \geqslant 1) & \Rightarrow \quad N = (3p - 2)^2. \end{cases}$$

Autres solutions : **BADIOU** (Paris), **QUENTON** (Madrid), **VAUTTIER** (Saint-Lô), **VIAN** (Mont Saint-Aignan) et l'auteur.

Enoncé n° 42 (ADLER, Paris)

On donne deux suites de n naturels. On définit un algorithme consistant à remplacer chaque nombre d'une suite par le nombre d'éléments de l'autre suite qui ont un indice strictement inférieur et qui sont strictement inférieurs à lui. Démontrer qu'au bout d'un nombre fini d'applications de cet algorithme, on obtient deux suites stables. Etant donnée une suite quelconque, peut-on lui associer une seconde suite de manière que l'ensemble des deux suites soit stable ?

Solution (JACOB, Grenoble)

Notons $u_{0,p}$ et $v_{0,p}$ les termes généraux des deux suites données, $u_{q,p}$ et $v_{q,p}$ les termes généraux des suites obtenues après avoir appliqué q fois l'algorithme donné. On voit de suite que $u_{q,0} = v_{q,0} = 0$ pour $q \geqslant 1$.

Supposons que pour tout $p \leqslant r$, $u_{q-1,p} = u_{q,p}$ et $v_{q-1,p} = v_{q,p}$; alors $u_{q+1,r+1} = u_{q,r+1}$ et de même pour v. Autrement dit, le nombre de termes stables par l'algorithme augmente chaque fois, au moins d'une unité. Comme, après le premier algorithme, il y a deux termes stables, les deux suites seront stables après le $(n-1)^{\text{ème}}$ algorithme.

Une suite ne peut être stable que si, quel que soit p, $u_p \leqslant p$, puisque u_p n'est précédé que de p termes dans la suite v.

Si nous supposons donc $u_p \leqslant p$ pour tout p, alors la suite $v_p = p$ sera telle que l'ensemble des deux suites u_p et v_p est stable. En effet, tout terme u_q tel que $q < p$ est inférieur à v_p et si $u_p = q \leqslant p$, les q premiers termes de v sont inférieurs à u_p, les autres lui sont supérieurs ou égaux.

Autre solution : l'auteur du problème.

Enoncé n° 43 (C. AUQUE, Clermont-Ferrand)

Déterminer les naturels n tels que n divise C_{2n-3}^{n-2}.

Solution (J. CHONÉ, L.E.M. Thiers)

Ce problème fait intervenir les nombres C_{2n-3}^{n-2}, étroitement liés aux nombres de Catalan. Rappelons l'introduction combinatoire de ces nombres donnée, par exemple, dans le problème n° 53 de "Challenging mathematical problems with elementary solutions", de A.M. Yaglom and I.M. Yaglom (vol. 1).

Soit a_n le nombre de manières de décomposer un polygone convexe ayant $(n+1)$ sommets : $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ en triangles par des diagonales ne se coupant pas à l'intérieur du polygone. On pose $a_1 = 1$ et on trouve, en faisant des dessins, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$, ...

Le côté $A_1 A_{n+1}$ appartient à un triangle dont le troisième sommet peut être A_{k+1} $(k = 1, ..., n-1)$. Il y a alors a_k manières de décomposer le polygone $A_1, ..., A_{k+1}$ et avec chacune d'entre elles, a_{n-k} manières de décomposer le polygone $A_{k+1}, ..., A_{n+1}$. Donc

$$(1) \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

Pour obtenir une autre relation de récurrence, imaginons que l'on prenne toutes les diagonales du polygone les unes après les autres et que, pour chacune d'entre elles, on effectue successivement toutes les décompositions où elle est tracée, et évaluons de deux façons le nombre, x, de décompositions ainsi effectuées :

1ère façon : chacune des a_n décompositions distinctes contient $(n-2)$ diagonales (pour voir ceci, on peut appeler respectivement k et k' le nombre de triangles et le nombre de diagonales entrant en jeu dans une décomposition quelconque et résoudre le système obtenu en comptant de deux façons les segments et la somme des angles de la figure).
Chaque décomposition apparaîtra donc $(n-2)$ fois dans le processus indiqué ; d'où $x = (n-2)a_n$.

2ème façon : il y a $(a_k a_{n-k+1})$ décompositions où la diagonale $A_1 A_{k+1}$ est tracée. Lorsque l'on prend successivement chaque diagonale issue de A_1 et que l'on effectue toutes les décompositions où elle est tracée, on fait $\sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1}$ décompositions. On recommence avec chaque sommet et on obtient en tout $(n+1)\sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1}$ décompositions, ce qui représente $2x$, puisque chaque diagonale a été envisagée deux fois.

D'où la formule :

$$(2) \qquad \frac{(n+1)}{2}\sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1} = (n-2)\, a_n$$

(1), où on remplace n par $(n+1)$, et (2) donnent :

$$a_{n+1} - 2a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1} = \frac{2(n-2)}{n+1} a_n \ ;$$

d'où $a_{n+1} = \dfrac{2(2n-1)}{n+1} a_n$.

On obtient enfin :

$$a_n = \frac{2(2n-3)}{n} a_{n-1} = \frac{2(2n-3)\cdot 2(2n-5)\ldots 2(1)}{n\,!} = \frac{2}{n} C_{2n-3}^{n-1} = \frac{2}{n} C_{2n-3}^{n-2}$$

(ces nombres naturels (cf. leur définition) sont appelés nombres de Catalan).

On voit immédiatement que, si n est impair ($n \geqslant 3$), n divise C_{2n-3}^{n-2}. Le problème revient maintenant à étudier les cas où n et a_n sont pairs ensemble. Posons $n = 2^k n'$ (où n' est impair).

$$(1) \text{ donne } \quad a_n = 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} a_k a_{n-k} + (a_{\frac{n}{2}})^2 \ ;$$

donc a_n a même parité que $a_{\frac{n}{2}}$ et, par conséquent, que $a_{n'}$;

si n' est un nombre impair au moins égal à 3, $a_{n'}$ et a_n sont pairs ;
si $n' = 1$, a_n, qui a la même parité que $a_2 = 1$, est impair.

En résumé, n divise C_{2n-3}^{n-2} si et seulement si n n'est pas une puissance de deux.

Solution (DUFRESNOY, Bordeaux)

Si n est un naturel non nul, on désigne par $f(n)$ l'exposant de 2 dans la décomposition de $n\,!$ en facteurs premiers. On a :

$$f(2n+1) = f(2n) = f(n) + n$$

ce qui permet de démontrer par récurrence que :

$$f(n) \leqslant n - 1$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si n est une puissance de 2.

De la relation

$$2(n-1)\, C_{2n-3}^{n-2} = n\, C_{2n-2}^{n-2}$$

on déduit que $2\, C_{2n-3}^{n-2}$ est divisible par n.

L'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers du naturel $\frac{2}{n} C_{2n-3}^{n-2}$ est $1 + f(2n-3) - f(n-2) - f(n) = n - 1 - f(n)$

On en conclut que n divise C_{2n-3}^{n-2} si et seulement si n n'est pas une puissance de 2.

Autres solutions : ADAD (Sceaux), BADIOU (Paris), BOUTEILLER (Brive), COQUET (Valenciennes), JACOB (Grenoble), LOZAC'H (Caen), QUENTON (Madrid), TISSIER (Le Raincy), VATTIER (Saint-Lô) et l'auteur.

Remarque : Ces nombres interviennent dans le développement de $\sqrt{1+x}$.