Bulletin de l'APMEP n°284 - Juin 1972

1

LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE EN CLASSE DE TROISIÈME

Les deux articles qui suivent donnent deux présentations différentes de la géométrie métrique. Avec celle des commentaires, l'enseignant disposera ainsi de trois approches différentes et équivalentes ; différentes car les systèmes d'axiomes ne sont pas les mêmes, équivalentes car tout théorème ou axiome dans une présentation est également théorème ou axiome dans une autre.

Rappelons que le programme de quatrième se termine par la construction du plan vectoriel. Les commentaires proposent de prendre, comme définition d'un plan euclidien, un plan affine muni d'une orthogonalité (involution sans point fixe dans l'ensemble des directions) compatible avec le choix d'une distance sur chaque droite ; la relation de compatibilité étant la symétrie du rapport de projection orthogonale. Le théorème de Pythagore, qui est une conséquence immédiate, permet une démonstration assez rapide de toutes les propositions du programme.

On peut remarquer que cette présentation ne suppose pas la construction préalable du plan vectoriel ; elle n'est donc pas une suite logique des programmes de quatrième mais elle permet de faire de la géométrie métrique avant que ces derniers soient "terminés". Les propriétés du plan affine euclidien sont simplement traduites en langage vectoriel.

La démarche de R. Gauthier est exactement inverse : il définit le plan affine euclidien comme la donnée du plan affine et d'un produit scalaire dans le plan vectoriel puis à l'aide du produit scalaire, la norme d'un vecteur et l'orthogonalité de deux vecteurs et traduit ces notions dans le plan affine par la distance de deux points et l'orthogonalité de deux directions.

Les propriétés du plan affine euclidien, en particulier le théorème de Pythagore avec sa réciproque, la symétrie du rapport de projection se démontrent rapidement en utilisant les vecteurs. Une telle présentation est très naturelle après les programmes de quatrième, mais elle suppose ceux-ci terminés.

La conception de G. H. Clopeau est encore différente. Les commentaires et l'article de Gauthier proposent de mathématiser le plan physique, mais on peut considérer que droites physiques et plan physique sont déjà une première abstraction de la réalité : droite technique et plan technique. C'est cette réalité que Clopeau nous propose de mathématiser ; en quatrième l'observation des glissements de la droite technique l'a amené à définir le groupe commutatif des translations opérant simplement et transitivement dans le plan. En troisième l'observation des pivotements d'un disque l'amène à définir de même le groupe commutatif des rotations. Son but est de dégager, le plus rapidement possible, la structure d'espace vectoriel euclidien.

Il est vain de vouloir préférer une axiomatique à une autre parce qu'elle est plus "naturelle", aucune étude sérieuse n'ayant été faite sur ce qui est "naturel" à un élève de quatrième et de troisième ; de plus ce "naturel" est fonction de ce que l'élève a fait dans les classes antérieures. Enfin une comparaison sur ce sujet avec les anciens programmes risque d'être défavorable aux nouveaux.

Le but des auteurs des nouveaux programmes en géométrie est, d'une part, d'énoncer toutes les prémisses pour faire comprendre ce qu'est une démonstration, et d'autre part, de montrer comment les mathématiques permettent de maîtriser une situation concrète. On ne peut donc comparer les différentes axiomatiques de la géométrie que sur la simplicité des démonstrations et sur leur efficacité à rendre compte de la "réalité". *Sur la base de ces critères on ne peut que rejeter une axiomatique qui se fonderait par exemple (comme le propose Mademoiselle Delavault) sur les symétries orthogonales, dont l'existence et les propriétés sont "naturelles" à cause du pliage mais qui nécessitent un plus long développement théorique.*

Il semble à priori que les démonstrations soient plus faciles dans un cadre vectoriel mais que la liaison avec le plan physique soit plus aisée dans la présentation des commentaires. De toute manière, ce n'est que l'expérience qui permettra de trancher ; c'est pourquoi nous souhaitons que de nombreux enseignants nous transmettent leurs conclusions.