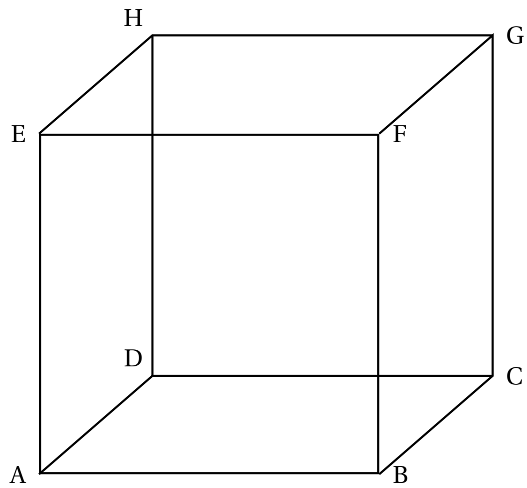
Brevet de technicien supérieur
Design de communication, d'espace, de produits
session 2010

Exercice 1 **7 points**

Le solide représenté sur la figure est un cube de côté 3 cm.



1. On désigne par I le milieu du segment [BC].
Dans cet exercice, on admet que les droites (HD) et (DI) sont perpendiculaires.

a. Justifier que AH $= 3\sqrt{2}$, IA $= \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ et HI $= \dfrac{9}{2}$.

b. Démontrer que $\cos\widehat{\text{HIA}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{HIA}}$. Arrondir à 10^{-1}.

2. **a.** On désigne par V le volume de la pyramide HAID. Montrer que $V = \dfrac{9}{2}$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

b. Dans cette question, on admet que $\sin\widehat{\text{HIA}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
Ce résultat n'a pas à être démontré.
En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle HIA.

c. Déduire de ce qui précède la valeur exacte de la distance du point D au plan défini par le triangle HIA.

Exercice 2 **13 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points : $\text{P}_0(O\,;\,3)$; $\text{P}_1(0\,;\,7)$ et $\text{P}_2(5\,;\,3)$.
La courbe de Bézier $\mathcal{C}_1$ définie par ces points de contrôle est l'ensemble des points $M_1(t)$ tels que pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\overrightarrow{\text{O}M_1}\,(t) = (1-t)^2\overrightarrow{\text{O}P_0} + 2t(1-t)\overrightarrow{\text{O}P_1} + t^2\overrightarrow{\text{O}P_2}.$$

1. Démontrer que les coordonnées x_1 et y_1 des points $M_1(t)$ de cette courbe ont pour expression

$$x_1 = f_1(t) = 5t^2 \quad \text{et} \quad y_1 = g_1(t) = -8t^2 + 8t + 3.$$

2. Étudier les variations des fonctions f_1 et g_1, définies sur $[0\,;\,1]$ par $f_1(t) = 5t^2$ et $g_1(t) = -8t^2 + 8t + 3$.
Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. **a.** Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en chacun des points P_0, (obtenu pour $t = 0$), $M_1(1/2)$ et P_2 (obtenu pour $t = 1$).
Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus et tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_1$ correspondantes.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.

4. On considère maintenant les points de contrôle :

$$P_0(0\,;\,3)\,;\; P_3(0\,;\,-1)\,;\; P_4(10\,;\,-1) \quad \text{et } P_2(5\,;\,3).$$

On admet que la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par ces quatre points est l'ensemble des points $M_2(t)$ de coordonnées

$$x_2 = f_2(t) = 30t^2 - 25t^3 \;\text{ et }\; y_2 = g_2(t) = 12t^2 - 12t + 3,$$

où t appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Le tableau des variations conjointes des fonctions f_2 et g_2, définies sur $[0\,;\,1]$ par $f_2(t) = 30t^2 - 25t^3$ et $g_2(t) = 12t^2 - 12t + 3$ est le suivant :

t	0		0,5		0,8		1
$f_2'(t)$	0	+	11,25	+	0	−	−15
$f_2(t)$	0	↗		↗	6,4	↘	5
$g_2'(t)$	−12	−	0		+		12
$g_2(t)$	3	↘	0	↗		↗	3

Montrer que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont la même tangente aux points P_0 et P_2.

5. *Dans cette question, tous les tracés sont à effectuer sur la figure du 3.*

a. Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point $M_2(1/2)$.
Placer le point $M_2(1/2)$.

b. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$.