∽ Brevet de technicien supérieur ∾ Groupement E et Design d'espace session 2012

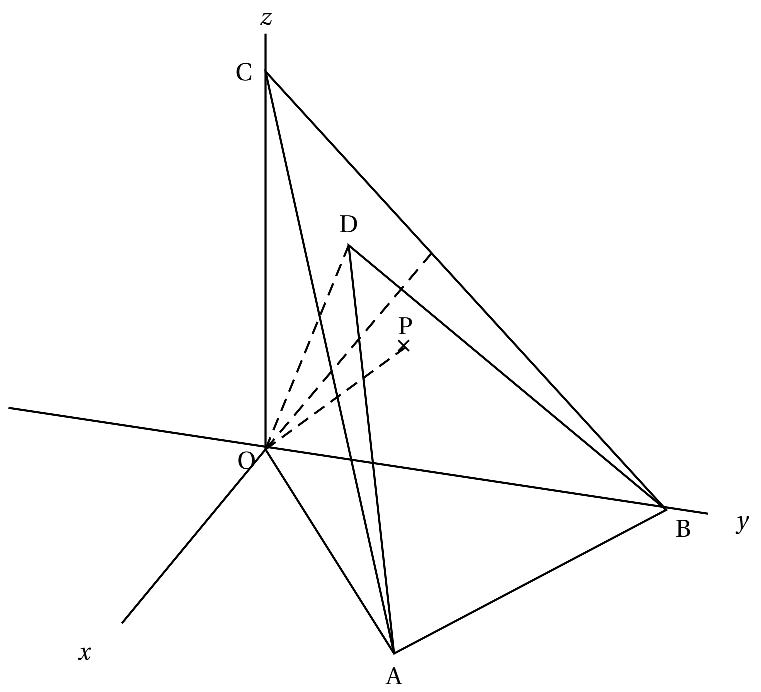
Exercice 1 **10 points**

Une municipalité étudie la proposition d'un cabinet d'architecture, afin de réaliser un centre d'observation du milieu naturel. L'un des projets propose, entre autres, le bâtiment que l'on représente sur la figure ci-dessous. destinée à l'élaboration d'une maquette.

L'espace est muni du repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, d'axes (O$x$), (O$y$), (O$z$) et d'unité graphique 1 cm.

Les arêtes du tétraèdre OABD représentent la structure portante en bois et le triangle ABC une verrière plane en verre et métal.

On note P le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) ; un mât métallique matérialisera le segment [OP].



Les points A, B, C, D ont pour coordonnées :

$$\text{A}(3\ ;\ 2\ ;\ 0);\quad \text{B}(0\ ;\ 3\ ;\ 0);\quad \text{C}(0\ ;\ 0\ ;\ 3) \text{ et } \text{D}(0,6\ ;\ 0,8\ ;\ 2).$$

Partie A

1. **a.** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$.

   b. Montrer que le plan (ABC) admet pour équation $x + 3y + 3z - 9 = 0$.

2. Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{42,75}$ cm^2.

   (On rappelle que l'aire d'un triangle ABC est donnée par $\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}\right\|$.

3. a. On admet que l'aire du triangle OAB est égale à 4,5 cm^2. En déduire la valeur exacte du volume de la pyramide OABC.

   (On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.)

   b. Calculer la valeur approchée, arrondie à 10^{-1}, de la distance OP.

Partie B

1. Montrer que le point D appartient au plan (ABC).
2. a. Calculer $\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{OB}}$.

   b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La valeur approchée, arrondie à 10^{-1} de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{AOB}}$ est :

81 °	123,7 °	56,3 °

Partie C

La figure étudiée précédemment correspond à une maquette à l'échelle 1/500 de la future construction (1 cm sur la maquette représente 500 cm dans la réalité).
À l'aide des résultats précédents et sachant que le volume du tétraèdre OABD est de 3 cm^3, calculer, en valeurs approchées arrondies à l'unité :
— la longueur, en mètres, du mât métallique à installer ;
— l'aire de la verrière (en m^2) ;
— le volume qui sera disponible à l'intérieur du bâtiment en bois.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points : A(0 ; 0) ; B(4 ; 10) et C(6 ; 0).

La courbe de Bézier C_1 définie par ces trois points de contrôle est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle [0 ; 1] :

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{\text{OA}} + 2t(1-t)\overrightarrow{\text{OB}} + t^2\overrightarrow{\text{OC}}.$$

1. Démontrer que les coordonnées x et y des points M(t) de cette courbe ont pour expression : $x = f(t) = -2t^2 + 8t$ et $y = g(t) = -20t^2 + 20t$.
2. Étudier les variations des fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(t) = -2t^2 + 8t \quad \text{et} \quad g(t) = -20t^2 + 20t.$$

   Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. a. Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe C_1 en chacun des points :

   A obtenu pour $t = 0$; M obtenu pour $t = 0,5$ et C obtenu pour $t = 1$.

   b. Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus, et tracer les tangentes à la courbe C_1 correspondantes.

   Puis tracer C_1.

Partie B

On s'intéresse maintenant à la courbe de Bézier C_2 définie par les quatre points de contrôle A, D, E et C avec D$(2\,;\,5)$ et E$(5\,;\,5)$.

On admet que les coordonnées des points $N(t)$ de C_2 ont pour expression $x = u(t)$ et $y = v(t)$, où u et v sont des fonctions de la variable réelle t définies sur $[0\,;\,1]$ dont les variations sont données par le tableau suivant :

t	0		$0,5$		1
$u'(t)$	6	$+$	$6,75$	$+$	3
$u(t)$	0	↗	$3,375$	↗	6
$v'(t)$	15	$+$	0	$-$	-15
$v(t)$	0	↗	$3,75$	↘	0

1. a. Montrer que C_1 et C_2 admettent des tangentes communes en A et C.

b. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraÎt exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Un vecteur directeur de la tangente à C_2 au point N obtenu pour $t = 0,5$ a pour coordonnées :

$(6,75\,;\,0)$	$(3,375\,;\,3,75)$	$(0\,;\,3,75)$

2. Placer les points D, E et N sur la figure commencée à la partie A, puis tracer l'allure de C_2.