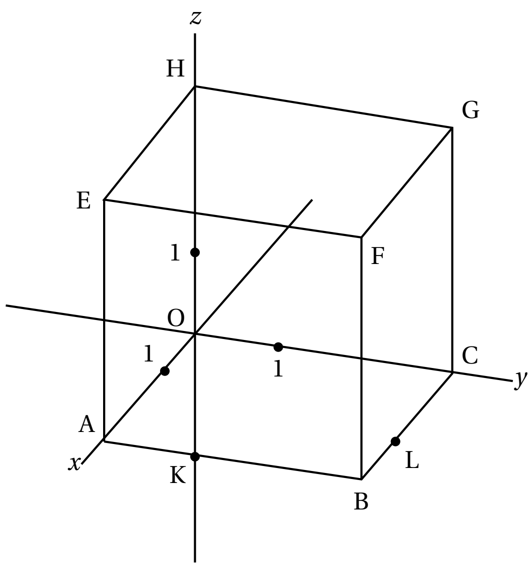
Brevet de technicien supérieur
Groupement E et Design d'espace session 2011

Exercice 1 **10 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ d'unité graphique 1 cm.



On a représenté ci-dessus un cube ABCOEFGH d'arête 3 cm.

On appelle K le point de [AB] tel que : $AK = \dfrac{1}{3}AB$, et L le point de [BC] tel que : $BL = \dfrac{1}{3}BC$.

A. Étude du triangle KLF

1. Donner les coordonnées des points B, F, K et L.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FK}$ et $\overrightarrow{FL}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{FK}\,(0\ ;\ -2\ ;\ -3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FL}\,(-1\ ;\ 0\ ;\ -3).$$

3. **a.** Calculer les valeurs exactes de $\|\overrightarrow{FK}$; $\|\overrightarrow{FL}\|$ et $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{FL}$.

   b. En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-1} de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{KFL}$.
4. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FK}\wedge\overrightarrow{FK}$.

   b. En déduire que l'aire du triangle KFL est égale à 3,5 cm^2.

B. Étude du solide tronqué AKLCOEFGH

On enlève au cube ABCOEFGH de départ, le tétraèdre KBLF. On obtient ainsi le solide tronqué AKLCOEFGH.

1. Donner sans justification la nature des faces du solide tronqué AKLCOEFGH.
2. Montrer que l'aire totale de toutes les faces du solide AKLCOEFGH est égale à 52 cm^2.

3. Calculer le volume du solide AKLCOEFGH.
(On rappelle que le volume de la pyramide est donné par : $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.)

Exercice 2 **10 points**

On utilise un modèle de Bézier pour créer un logo.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 4 cm, on considère les points :

$$\text{P}_0(0\,;\,0) \quad ; \quad \text{P}_1(1\,;\,0) \quad ; \quad \text{P}_2(1\,;\,1) \quad \text{et} \quad \text{P}_3(0\,;\,2).$$

La courbe de Bézier $\mathscr{C}$ définie par les quatre points de contrôle P_0, P_1, P_2, P_3 est l'ensemble des points $M(t)$ tels que pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\overrightarrow{\text{O}M}(t) = (1-t)^3\overrightarrow{\text{OP}_0} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{\text{OP}_1} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{\text{OP}_2} + t^3\overrightarrow{\text{OP}_3}.$$

1. Démontrer que les coordonnées x et y des points $M(t)$ de cette courbe ont pour expression :

$$x = f(t) = -3t^2 + 3t \quad \text{et} \quad y = g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

2. Étudier les variations des fonctions f et g, définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(t) = -3t^2 + 3t \quad \text{et} \quad g(t) = -t^3 + 3t^2.$$

Rassembler les résultats dans un tableau unique.

3. **a.** Donner un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en chacun des points P_0, obtenu pour $t = 0$, $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$, obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$ et P_3, obtenu pour $t = 1$.
Sur une feuille de papier millimétré, placer ces points dans le repère défini ci-dessus et tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ correspondantes.

b. Placer le point P_2 sur la figure.
Que représente le vecteur $\overrightarrow{\text{P}_2\text{P}_3}$ pour la courbe $\mathscr{C}$?

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.