Brevet de technicien supérieur Groupement D session 2010

Exercice 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 2y = 2\text{e}^{-2t},$$

où y est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$,
et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_0)~:~y' + 2y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $h(t) = 2t~\text{e}^{-2t}$.
Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur 1 pour $t = 0$.

B. Étude d'une fonction.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = (1 + 2t)\text{e}^{-2t}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

- **a.** Vérifier que pour t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$: $f'(t) = -4t\text{e}^{-2t}$.
- **b.** En déduire le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3.
- **a.** Compléter le tableau de valeurs donné en **annexe**. Arrondir à 10^{-2}.
- **b.** Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère donné en **annexe**.

C. Application de la partie B

Dans les régions de production, on peut contrôler le taux de sucre des melons avec un réfractomètre à mesure rapide.

Le taux de défaillance du réfractomètre dans l'intervalle de temps $[0\ ;\ +\infty[$ peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = 1 - f(t) = 1 - (1+2t)\mathrm{e}^{-2t},$$

où t est exprimé en heures et f est la fonction étudiée dans la **partie B**.

1. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies à 10^{-2}.
   a. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout d'une heure ?
   b. Quel est le taux de défaillance du réfractomètre au bout de deux heures ?
2. Pour des raisons de fiabilité, on doit changer le réfractomètre lorsque le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75.
   a. Montrer que le taux de défaillance est supérieur ou égal à 0,75 lorsque $f(t) \leqslant 0,25$.
   b. En utilisant la courbe représentative de la fonction f tracée en **annexe**, déterminer graphiquement à 10^{-1} près, la durée d'utilisation du réfractomètre. On laissera les traits de construction apparents.

Exercice 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une usine fabrique en grande quantité des récipients cylindriques pour le laboratoire.

A. Loi normale

Le couvercle d'un récipient est conçu pour avoir un diamètre de 60 millimètres.
Il est non défectueux lorsque son diamètre, exprimé en millimètres, appartient à l'intervalle $[59,93\ ;\ 60,07]$.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe le diamètre, en millimètres, de son couvercle.
On suppose que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart type 0,03.
Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production ait un couvercle non défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

B. évènements indépendants

Les récipients fabriqués sont susceptibles de présenter deux défauts : un défaut au niveau de leur couvercle ou un défaut de convenance.
On prélève un récipient au hasard dans la production d'une journée.
On considère les évènements suivants :
E_1 : « le couvercle du récipient prélevé est défectueux » ;
E_2 : « le récipient prélevé présente un défaut de contenance ».
On suppose que les évènements E_1 et E_2 sont indépendants.
On admet que : $P(E_1) = 0,02$ et $P(E_2) = 0,01$.

Dans cette partie, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

1. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente les deux deux défauts.
2. **a.** Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée présente au moins un des deux défauts.
   b. Calculer la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard dans la production d'une journée ne présente aucun des deux défauts.

C. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

On prélève au hasard 50 récipients dans un stock pour vérification de leur couvercle. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 récipients.
On rappelle que la probabilité qu'un récipient prélevé au hasard ait un couvercle défectueux est égale à 0,02.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 récipients, associe le nombre de récipients de ce prélèvement ayant un couvercle défectueux.

1. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, un seul récipient ait un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

3. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson.

   a. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

   b. On désigne par Y_1 une variable aléatoire suivant la loi de ¶de paramètre λ, où λ est la valeur obtenue au **a**.

   En utilisant la loi suivie par Y_1, calculer la probabilité qu'au plus trois récipients d'un prélèvement aient un couvercle défectueux. On arrondira à 10^{-2}.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie on s'intéresse à la contenance de chaque récipient, exprimée en centimètres cubes.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon dans un lot important.
Soit $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon prélevés au hasard et avec remise dans le lot, associe la moyenne des contenances des récipients de cet échantillon.
On suppose que $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{50}}$ avec $\sigma = 0,06$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue, arrondie à 10^{-2}, est : $\overline{x} = 119,88$.
Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne μ des contenances des récipients de ce lot, avec un taux de confiance supérieur ou égal à 95 %.
On arrondira à 10^{-2} les bornes de cet intervalle.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 1, Partie B, question 3.

1. Tableau de valeurs (arrondies à 10^{-2}) de la fonction f

x	0	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

2. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$