Brevet de technicien supérieur Métropole session 15 mai 2012 - groupement C

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment

Partie 1

1. L'équation à résoudre est équivalente à l'équation $y' = -\frac{1}{2}y$, qui est de la forme $y' = ay$.
   Nous savons que les solutions de ces équations sont les fonctions h de la forme $h(t) = k\text{e}^{at}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
   Les solutions de l'équation sont donc les fonctions h telles que $h(t) = k\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. La fonction g doit vérifier l'équation (E) donc : $g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = \frac{13}{2}$ soit $0 + \frac{1}{2}k = \frac{13}{2}$, d'où $k = 13$. Ainsi $g(t) = 13$.
3. On sait que les fonctions solutions de l'équation linéaire du premier ordre avec second membre (E) sont les fonctions somme des fonctions h solutions de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de (E) (par exemple la fonction g trouvée au 2.).
   L'ensemble des fonctions solutions de (E) sont donc les fonctions f vérifiant $f = h + g$ soit :
   $$f(t) = k\text{e}^{-\frac{1}{2}t} + 13.$$
4. $f(0) = 0$ équivaut à , soit $k + 13 = 0$, d'où $k = -13$.
   La solution de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$ est donc la fonction vérifiant pour tout t réel de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = -13\text{e}^{-\frac{1}{2}t} + 13$, soit
   $$f(t) = 13\left(1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}t}\right).$$

Partie 2

1. On vérifie que la fonction f proposée est celle trouvée à l'issue de la partie 1 (comme d'habitude...).
   f est de la forme $k \times u$, donc sa dérivée f' sera de la forme $k \times u'$.
   $f'(t) = 13\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\text{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$, soit $f'(t) = \frac{13}{2}\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$.
2. Pour étudier les variations de f, on étudie le signe de sa dérivée : puisque est $\text{e}^{-\frac{1}{2}t}$ toujours strictement positif, f' est toujours strictement positive, donc f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	13

3. Pour montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathscr{D}$, il suffit d'observer que $\lim\limits_{t\to+\infty} 13\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)=13$. En effet, lorsque t tend vers $+\infty$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ tend vers 0.

   Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=13$: la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=13$ est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

4. On sait que l'équation réduite de la tangente T à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est : $T \quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$, soit dans notre cas : $T \quad . \; y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

   Or $f(0)=0$ et $f'(0)=\dfrac{13}{2}$, donc $T: \quad y=\dfrac{13}{2}x$ (voir graphique ci-dessous).

Partie 3

1. Comme f est strictement croissante, il suffit de déterminer graphiquement l'antécédent de 10 : on trouve environ 2,9 (cf. graphique). Ainsi, c'est au bout de 2,9 secondes environ que la vitesse de la boule dépasse 10 mm.s^{-1}.

2. Il suffit de résoudre l'équation $f(t)=10$:

   $f(t)=10$ ou $13\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)=10$ soit

   $1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}=\dfrac{10}{13}$ ou encore $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}=\dfrac{3}{13}$

   et en prenant le logarithme népérien :

   $-\dfrac{1}{2}t=\ln\left(\dfrac{3}{13}\right)$

   et finalement $t=-2\ln\left(\dfrac{3}{13}\right)\approx 2,93$.

   On retrouve bien la valeur trouvée graphiquement.

3. Rappelons que cette formule est aimablement fournie par le formulaire :

   $V_m=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$; on a donc ici effectivement :

   $V_m=\dfrac{1}{4-2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $V_m=\dfrac{1}{2}[F(t)]_2^4$, où F est une primitive de f.

   Or $f(t)=13\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right)$, soit $-13\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}+13$ d'où, $F(t)=-13\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}}{-\frac{1}{2}}+13t$ soit $F(t)=13t+26\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

   Ainsi $V_m=\dfrac{1}{2}[F(4)-F(2)]=\dfrac{1}{2}\left[\left(13\times4+26\mathrm{e}^{-0,5\times4}\right)-\left(13\times2+26\mathrm{e}^{-0,5\times2}\right)\right]$.

   Soit $V_m=\dfrac{52+26\mathrm{e}^{-2}-26-26\mathrm{e}^{-1}}{2}$ et finalement : $V_m=13\left(1+\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-1}\right)$.

   $V_m\approx 9,97$ mm.s^{-1}.

Exercice 2 **11 points**

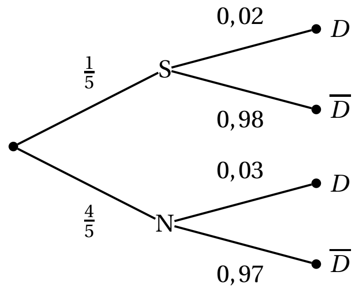
Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment
Partie A

1. En saisissant les données à la calculatrice, on obtient l'équation suivante : $C=-0,262t+18,2$.
2. Voir à la fin.
3. Pour déterminer, à l'aide de cet ajustement, le taux d'humidité à utiliser pour obtenir la cote de 15mm :
   — on peut lire sur le graphique l'abscisse du point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée 15 : on lit $t\approx 12,2$;

— ou bien résoudre l'équation $C = 15$, soit $-0,262t + 18,2 = 15$, qui nous donne $t = \dfrac{15 - 18,2}{-0,262}$, soit $t \approx 12,2$.

Partie B

Notons les évènements suivants :
N : « la pièce choisie au hasard provient de l'atelier NORD »
S : « la pièce choisie au hasard provient de l'atelier SUD »
D : « la pièce choisie au hasard est défectueuse »
Construisons un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.



On remarque que $p(S) = \dfrac{1}{5}$: en effet l'atelier SUD produit 100 pièces sur un total de 500 pièces.
De même $p(N) = \dfrac{4}{5}$.
On cherche $p\left(\overline{D}\right)$. En vertu de la loi des probabilités totales, on a, $p\left(\overline{D}\right) = p\left(S \cap \overline{D}\right) + p\left(N \cap \overline{D}\right)$ soit, $p\left(\overline{D}\right) = p(S) \times p_S\left(\overline{D}\right) + p(N) \times p_N\left(\overline{D}\right)$ d'où $p\left(\overline{D}\right) = \dfrac{1}{5} \times 0,98 + \dfrac{4}{5} \times 0,97 = \dfrac{243}{250} = 0,972$.
La probabilité qu'une pièce prise au hasard ne soit pas défectueuse est donc de 97,2 %.

Partie C

1. On passe de la variable $C(\mathcal{N}(15\ ;\ 0,05))$ à la variable $T(\mathcal{N}(0\ ;\ 1))$ par le changement de variable $T = \dfrac{C - \mu}{\sigma}$, soit $T = \dfrac{C - 15}{0,05}$.
   Une pièce est conforme lorsque $14,9 \leqslant C \leqslant 15,1$.
   On a alors : $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = p(14,9 - 15 \leqslant C - 15 \leqslant 15,1 - 15)$
   $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = p(p\left(\dfrac{14,9 - 15}{0,05} \leqslant \dfrac{C - 15}{0,05} \leqslant \dfrac{15,1 - 15}{0,05})\right)$
   $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = p(-2 \leqslant 2)$ ou $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = \Pi(2) - \Pi(-2)$
   $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = \Pi(2) - [1 - \Pi(2)] = 2\Pi(2) - 1 \approx 2 \times 0,9772 - 1$
   $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = \approx 0,9544$
   La probabilité que la pièce soit acceptée est donc de 95,44 % environ.
2. La probabilité que la pièce soit acceptée doit donc être égale à 0,998. On résout donc l'équation :
   $p(14,9 \leqslant C \leqslant 15,1) = 98\,\%$.
   σ étant inconnu, on applique ici le changement de variable $T' = \dfrac{C - 15}{\sigma}$:
   $p(\dfrac{14,9 - 15}{\sigma} \leqslant \dfrac{C - 15}{\sigma} \leqslant \dfrac{15,1 - 15}{\sigma})$
   $p\left(\dfrac{-0,1}{\sigma}\right) \leqslant T' \leqslant \dfrac{0,1}{\sigma} = 99,8\,\%$, donc
   $\Pi\left(\dfrac{0,1}{\sigma}\right) - \Pi\left(\dfrac{-0,1}{\sigma}\right) = 99,8\,\%$

$2\Pi\left(\dfrac{0,1}{\sigma}\right)-1=99,8\,\%$ ou $\Pi\left(\dfrac{0,1}{\sigma}\right)=0,999$.

On lit dans la table de la loi normale centrée réduite que,

$\dfrac{0,1}{\sigma}\approx 3,1$ soit $\sigma\approx\dfrac{0,1}{31}$, ainsi $\sigma\approx 0,03$.

Partie D

1. L'hypothèse H_0 est : « $\mu=15$ » , où μ est la cote moyenne en mm de l'ensemble des pièces de la production.

   L'hypothèse alternative est H_1 : «$\mu\neq 15$»

2. **a.** Appliquons le changement de variable $\overline{T}=\dfrac{\overline{C}-\mu}{\sigma}$, soit ici : $\overline{T}=\dfrac{\overline{C}-15}{0,02}$.

   $p(15-h\leqslant\overline{C}\leqslant 15+h)=0,95$ soit, $p(-h\leqslant\overline{C}-15\leqslant h)=0,95$

   puis $p\left(\dfrac{-h}{0,06}\leqslant\dfrac{\overline{C}-238}{0,06}\leqslant\dfrac{h}{0,06}\right)=0,95$ d'où : $p\left(\dfrac{-h}{0,02}\leqslant T\leqslant\dfrac{h}{0,02}\right)=0,95$

   $\Pi\left(\dfrac{h}{0,02}\right)-\Pi\left(\dfrac{-h}{0,02}\right)=0,95$ soit $2\Pi\left(\dfrac{h}{0,02}\right)-1=0,95$ donc :

   $\Pi\left(\dfrac{h}{0,02}\right)=0,975$.

   À l'aide du formulaire , on obtient : $\dfrac{h}{0,02}\approx 1,96$ soit $h\approx 0,04$.

   L'intervalle de confiance au risque de 5 % est donc $I_{95\,\%}=[15-0,04\ ;\ 15+0,04]$, soit $I_{95\,\%}=[14,96\ ;\ 15,04]$.

   b. Règle de décision du test :

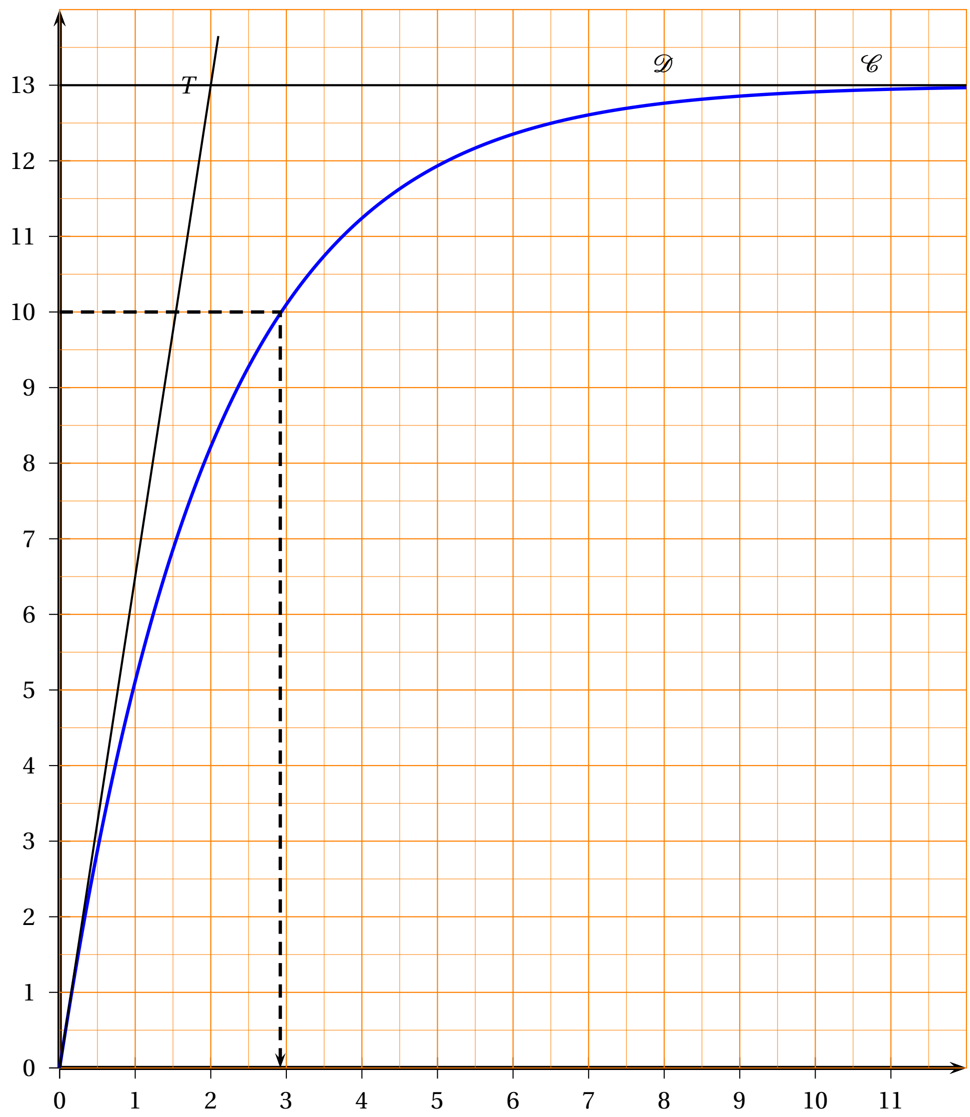
   ⋆ si la cote moyenne de l'échantillon est dans l'intervalle $I_{95\,\%}=[14,96\,;\,15,04]$, l'hypothèse H_0 est validée

   ⋆ sinon , l'hypothèse H_1 est validée.

3. On applique la règle énoncée au dessus :

   puisque la cote moyenne de l'échantillon est 15,02, qui appartient à l'intervalle $I_{95\,\%}=[14,96\ ;\ 15,04]$, l'hypothèse H_0 est validée : on peut considérer, avec un risque de 5 %, que la cote moyenne de l'ensemble de la production est égale à 15 mm.

ANNEXE 1, À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2, À RENDRE AVEC LA COPIE