Brevet de technicien supérieur novembre 2010 - groupement B Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}): \quad y' - 3y = -\mathrm{e}^{3x}$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

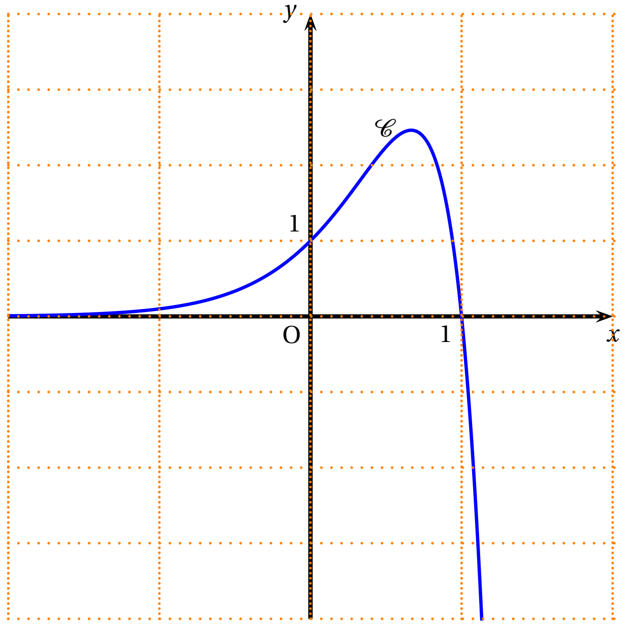
1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0): \quad y' - 3y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{3x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$. Sa courbe représentative est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 1 - x$	$x = 0$	$y = 0$

2. a. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (2-3x)\mathrm{e}^{3x}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c. Établir le tableau de variations de f.
(La valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'est pas demandée.)

3. a. À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x}$.

b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Pour les questions 3. c. et 3. d., une seule réponse A, B, C est exacte.
Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

c. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = \frac{3}{2}x^2$	$y = 1 + 2x$	$y = 1$

d. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

C. Calcul intégral

1. On note $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\mathrm{I} = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 7\mathrm{e}^{-3}}{9}$.

b. Donner la valeur de I, arrondie à 10^{-2}.

2. a. Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ pour x dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

b. Interpréter graphiquement le nombre I.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise produit en grande série des plaques métalliques rectangulaires pour l'industrie automobile.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à10^{-1}

A. Loi binomiale

On note E l'évènement : « une plaque prélevée au hasard dans la production d'une journée est défectueuse ».
On suppose que $P(E) = 0,02$.
On prélève au hasard 50 plaques dans la production de la journée pour vérification. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 plaques.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de plaques de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer les probabilités $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux plaques soient défectueuses.

B. Loi normale

Une plaque de ce type est conforme pour la longueur lorsque sa longueur L, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[548 ; 552]$. Une plaque de ce type est conforme pour la largeur lorsque sa largeur ℓ, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle $[108 ; 112]$.

1. On note L_1 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa longueur L. On suppose que la variable aléatoire L_1 suit la loi normale de moyenne 550 et d'écart type 1.
   Calculer $P(548 \leqslant L_1 \leqslant 552)$.
2. On note L_2 la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans le stock, associe sa largeur 1. On admet que
   $P \leqslant (108 \leqslant L_2 \leqslant 112) = 0,95$.
   On suppose que les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes.
   On prélève une plaque au hasard dans le stock. Déterminer la probabilité qu'elle soit conforme pour la longueur et conforme pour la largeur.

C. Intervalle de confiance

Dans cette partie on considère une grande quantité de plaques devant être livrées à une chaîne de montage de véhicules électriques. On considère un échantillon de 100 plaques prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 94 plaques sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p des plaques de cette livraison qui sont sans défaut.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 plaques prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des plaques de cet échantillon qui sont sans défaut.
   On suppose que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$,où p est la fréquence inconnue des plaques de la livraison qui sont sans défaut.
   Déterminer un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 %.