Brevet de technicien supérieur Nouvelle–Calédonie session 2009 - groupement B

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \quad : \quad y'' + 2y' - 3y = -4\mathrm{e}^{x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) : y'' + 2y' - 3y = 0.$$

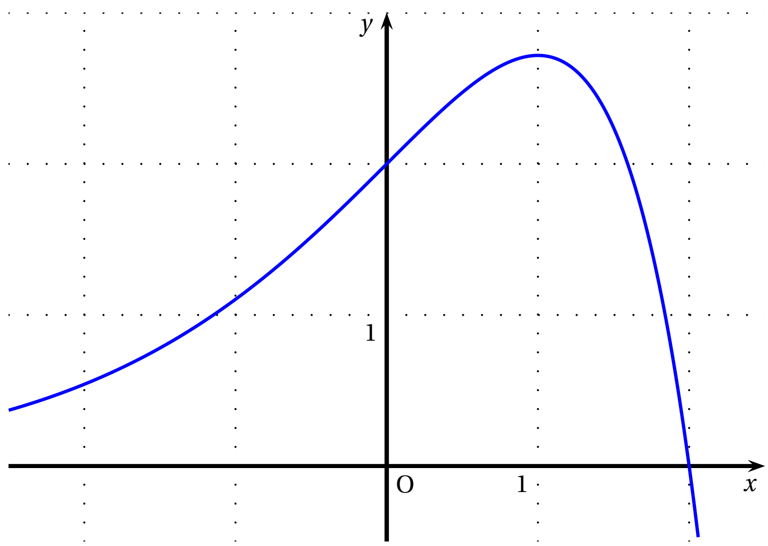
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x\mathrm{e}^{x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x}$.

b. Donner les valeurs exactes des coordonnées du point S où la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

2. a. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est $f(x) = 2 + x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

b. Déduire du a. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage de ce point.

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = 2\mathrm{e} - 3$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

2. On note $J = \displaystyle\int_0^1 \left(2 + x - \frac{x^3}{6}\right)\mathrm{d}x$.

a. Démontrer que $J = \dfrac{59}{24}$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de J.

3. On désigne par S l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On désigne par S_1 l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = 2 + x - \dfrac{x^3}{6}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

On admet que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\ 1]$, $f_1(x) \geqslant f(x)$. Donner la valeur exacte de $S_1 - S$.

En déduire la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de $S_1 - S$.

Exercice 2 **8 points**

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

Une entreprise produit en grande série un accessoire d'un certain type pour l'industrie automobile.

A. Évènements indépendants

Dans cette partie, donner les valeurs exactes des probabilités

Chaque accessoire fabriqué peut présenter deux défauts, que l'on désigne par défaut a et défaut b.

On prélève au hasard un accessoire dans la production d'une journée. On note A l'évènement : « l'accessoire présente le défaut a » et B l'évènement : « l'accessoire présente le défaut b ».

On suppose que $P(A) = 0,02$ et que $P(B) = 0,01$.

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente le défaut a et le défaut b.

2. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée présente au moins un des deux défauts.
3. Calculer la probabilité qu'un accessoire prélevé au hasard dans la production de la journée ne présente aucun des deux défauts a et b.

Dans ce qui suit, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-1}

B. Loi binomiale

On considère un stock important d'accessoires. On note E l'évènement : « un accessoire prélevé au hasard dans le stock d'accessoires est défectueux. »
On suppose que $P(E) = 0,03$.
On prélève au hasard 20 accessoires dans le stock d'accessoires pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 20 accessoires.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre d'accessoires de ce prélèvement qui sont défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucun accessoire ne soit défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus un accessoire soit défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les accessoires sont livrés par lots de 1 000.
On prélève au hasard un lot de 1 000 dans le dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 accessoires.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 accessoires, associe le nombre d'accessoires défectueux parmi ces 1 000 accessoires.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,03$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.
On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type 5,39.

1. Justifier les valeurs des deux paramètres de cette loi normale.
2. Calculer, à l'aide de la variable aléatoire Z, la probabilité qu'il y ait au plus 25 accessoires défectueux dans le lot de 1 000 accessoires, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 25,5)$.

D. Intervalle de confiance

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse des accessoires d'un lot important.
On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 accessoires dans le lot.
Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 accessoires prélevés au hasard et avec remise dans le lot associe la moyenne des masses, en grammes, des accessoires de cet échantillon.
On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 5$.
Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\overline{x} = 501$.

1. **1.** Déterminer un intervalle de confiance centré sur $\overline{x}$ de la moyenne inconnue μ des masses des accessoires du lot considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.
2. **2.** On considère l'affirmation suivante : « la moyenne μ est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question 1 ».

   Est-elle vraie ? (On ne demande pas de justification.)