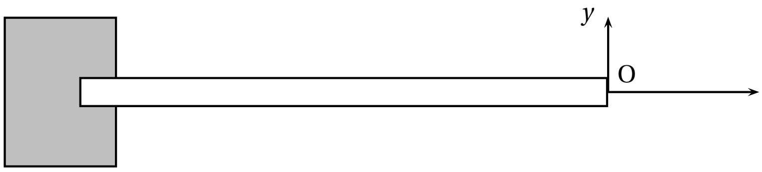
# ∽ Brevet de technicien supérieur ∾
# novembre 2011 - groupement B Nouvelle-Calédonie

**Exercice 1** **12 points**

Une entreprise étudie en laboratoire les propriétés vibratoires d'un nouveau matériau. Une barre de ce matériau est tenue horizontalement à une extrémité ; à l'autre extrémité elle est soumise à une force dirigée vers le bas et d'intensité variable. On considère, dans le repère indiqué sur la figure ci-dessous, l'ordonnée $y(t)$ de l'extrémité libre, en fonction du temps $t$.




**Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

*A. Résolution d'une équation différentielle*

L'étude du système mécanique conduit à considérer l'équation différentielle $(E)$ :

$$y'' + 4y' + 104y = -10,1\mathrm{e}^{-t}$$

où $y$ est une fonction de la variable réelle $t$, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, $y'$ sa fonction dérivée et $y''$ sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10\mathrm{i}$ et $r_2 = -2 - 10\mathrm{i}$.

   **b.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0)$ :

$$y'' + 4y' + 104y = 0.$$

2. Montrer que la fonction $h$, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = -0,1\mathrm{e}^{-t}$, est une solution de l'équation différentielle $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.
4. Montrer que la solution $f$ de l'équation différentielle $(E)$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t) = -0,1\left[\mathrm{e}^{-t} - \cos(10t)\mathrm{e}^{-2t}\right]$$

   vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0,1$.

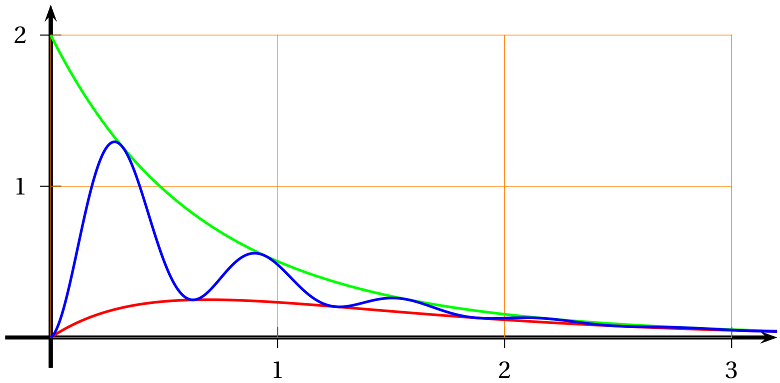
*B. Étude de fonctions*

Soit $g_1$ et $g_2$ les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g_1(t) = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} \quad \text{et} \quad g_2(t) = \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}.$$

Les courbes représentatives des fonctions $g_1$ et $g_2$, dans un repère orthonormal, ainsi que celle de la fonction $g = -10f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-t} - \cos(10t)\mathrm{e}^{-2t}$, sont données sur la figure de la page suivante.

**1.** On admet que, pour tout $t$ dans $[0\ ;\ +\infty[$, on a $g_2(t) \leqslant g(t) \leqslant g_1(t)$.
*Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.*
Attribuer à chaque courbe $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ de la figure, la fonction qui lui correspond.
Aucune justification n'est demandée.




**2.** Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions $g_1$ et $g_2$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

**3.** **a.** Calculer la dérivée de $g_1$.

**b.** Justifier que $g_1$ est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**4.** **a.** Démontrer que, pour tout $t$ de $[0\ ;\ +\infty[$, $g_2'(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(2\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$.

**b.** Résoudre dans $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $2\mathrm{e}^{-t} - 1 \geqslant 0$.

**c.** Déduire de ce qui précède la valeur exacte de $t$ pour laquelle la fonction $g_2$ admet un maximum.

**5.** *Les questions* 5. *a. et* 5. *b. sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
*La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

On admet que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g_2$ est :

$$g_2(t) = t - \frac{3}{2}t^2 + t^2\epsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

Ce développement limité, admis, n'a pas à être démontré.

**a.** On déduit de ce développement limité qu'une équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de $g_2$ au point d'abscisse 0 est :

| | | |
|---|---|---|
| $y = 0$ | $y = t$ | $y = t - \dfrac{3t^2}{2}$ |

**b.** On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe représentative de $g_2$ est en dessous de la tangente $T$. Recopier sur votre copie la justification exacte.

| | | |
|---|---|---|
| $t^2\epsilon(t)$ est négatif lorsque $t$ est positif. | $t - \dfrac{3t^2}{2}$ est négatif. | $-\dfrac{3t^2}{2}$ est négatif. |

*C. Calcul d'intégrale*

1. Démontrer que la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^3 \left[g_1(t) - g_2(t)\right]\,\mathrm{d}t$ où $g_1$ et $g_2$ sont les fonctions définies au début de la partie B, est $I = 1 - \mathrm{e}^{-6}$.
2. Interpréter géométriquement le résultat précédent.

**Les questions 1., 2., 3., 4. de cet exercice sont indépendantes**

**Exercice 2** **8 points**

On considère un stock de pièces de rechange pour les machines-outils d'une grande entreprise.

**Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à $10^{-2}$(sauf mention particulière)**

1. Le tableau suivant récapitule la consommation mensuelle d'un certain modèle de roulements à billes, pour les 11 mois travaillés de l'année dernière.

| Mois | Janvier | Février | Mars | Avril | Mai | Juin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantité | 20 | 30 | 25 | 15 | 25 | 10 |

| Mois | Juillet | Septembre | Octobre | Novembre | Décembre |
|---|---|---|---|---|---|
| Quantité | 35 | 42 | 25 | 35 | 15 |

   Déterminer la moyenne $x$ et l'écart type $\sigma$ de cette série statistique.

2. On désigne par $X$ la variable aléatoire qui, à un mois travaillé pris au hasard dans l'année à venir, associe la consommation du type de roulements à billes considéré au 1. On suppose que $X$ suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 9,5.
   **a.** Calculer $P(14,5 \leqslant X \leqslant 35,5)$.
   **b.** Déterminer le nombre réel $k$ tel que $P(X \leqslant k) = 0,95$.
   *Le nombre entier n, obtenu en arrondissant k par excès, est appelé « stock d'alerte à* 5 % *» pour la pièce considérée.*
3. Le délai de livraison d'un certain type de transformateur est de 20 jours. On admet que la variable aléatoire $Y$ qui, à une période de 20 jours prise au hasard dans l'année à venir, associe le nombre de transformateurs de ce type, mis en service pendant cette période, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.
   **a.** Calculer $P(Y \leqslant 5)$ et $P(Y \leqslant 6)$.
   **b.** En déduire le « stock d'alerte à 5 % » pour ce type de transformateur, c'est -à-dire le plus petit entier $a$ tel que $P(y \leqslant a) > 0,95$.
4. Pour réapprovisionner le stock d'un certain type de joints circulaires, on effectue une commande en grande quantité. Le fabriquant garantit des joints de 30 mm de diamètre, avec un écart type $\sigma = 1$ mm.
   Il est convenu de procéder, à la réception, à un contrôle de qualité à l'aide d'un test d'hypothèse bilatéral de la moyenne, sur un échantillon aléatoire de 64 joints.
   On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 64joints prélevés dans le lot reçu, associe la moyenne des diamètres en millimètres des joints de cet échantillon (le lot est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise).
   L'hypothèse nulle est $\mathrm{H}_0$ : « $\mu = 30$ ».
   L'hypothèse alternative est $\mathrm{H}_1$ : « $\mu \neq 30$ ». Le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

**a.** Sous l'hypothèse $H_0$, on considère que $\overline{Z}$ suit la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{64}}$.

Déterminer, sous cette hypothèse, le nombre réel $h$ positif tel que :

$$P\left(30 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 30 + h\right) = 0,95.$$

Arrondir $h$ à $10^{-3}$.

**b.** En déduire la règle de décision permettant d'utiliser ce test.

**c.** Sur l'échantillon de 64 joints prélevés dans le lot reçu, on trouve une moyenne de 29,8 mm pour les diamètres.

Indiquer si le lot est accepté en utilisant la règle de décision de la question précédente.