∽ Brevet de technicien supérieur ∾
Métropole–Antilles–Guyane
session 2012 - groupement B2

Exercice 1 **12 points**

A. Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : y' + 2y = -5\mathrm{e}^{-2x},$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad : y' + 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x\mathrm{e}^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

B. Étude locale d'une fonction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-5x)\mathrm{e}^{-2x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.
   a. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x\mathrm{e}^{-2x} = 0$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b. *Cette question est une question a choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$ dont une équation est :

$y = 1-5x$	$y = 0$	$x = 0$

2. **a.** À l'aide du développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t}$, déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$.
   b. En déduire que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 1 - 7x + 12x^2 + x^2\varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

   c. En déduire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   d. *Cette question est une question a choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe C est au dessus de la droite $\mathscr{T}$. Recopier sur la copie la justification qui vous paraît exacte.

$12x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$1-7x$ est positif au voisinage de 0.

C. Calcul intégral

1. on note $I=\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I=\dfrac{23\mathrm{e}^{-4}-13\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

b. Donner la valeur approchée de I, arrondie à e^{-2}.

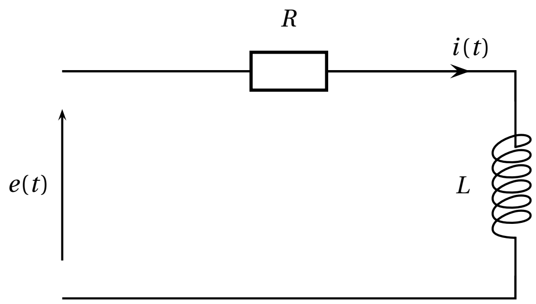
2. a. Donner sans justification, le signe de $f(x)$, pour x dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.

b. Interpréter graphiquement le nombre I.
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou non aboutie, sera prise en compte.

Exercice 2 **8 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$. On note $i(t)$ l'intensité du courant.



L'équation différentielle régissant ce circuit s'écrit :

$$Li'(t)+Ri(t)=e(t)$$

où la fonction inconnue i, de la variable t, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et i' est la fonction dérivée de i.
On se place dans le cas où $R=5\ \Omega$ et $L=1$ H de sorte que l'équation différentielle précédente devient :

$$(1):\quad i'(t)+5i(t)=e(t),$$

avec $i\left(0^+\right)=0$.
On suppose que la tension e est donnée par :

$$e(t)=\begin{cases}10 & \text{si}\quad 0\leqslant t<2\\ 0 \text{ si} & t<0 \text{ ou } t\geqslant 2.\end{cases}$$

A. Étude de la tension d'entrée

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle $[0\,;\,5]$. On prendra comme unité 2 cm pour l'axe des abscisses et 0,5cm pour l'axe des ordonnées.

2. On désigne par $\mathcal{U}$ la fonction échelon unité définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.
Montrer que pour tout nombre réel t, on a $e(t) = 10[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)]$.

B. Transformation de Laplace

En utilisant la transformée de Laplace, on se propose de déterminer l'intensité i du courant. On admet que i, i' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $I(p) = \mathscr{L}(i(t))$.

1. Déterminer $E(p)$.
2. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), montrer, sachant que $i\left(0^+\right) = 0$, que $I(p) = 10\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2p}}{p(p+5)}$.
   b. Montrer que $I(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$I(p) = 2\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+5} - \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p} + \frac{\mathrm{e}^{-2p}}{p+5}\right].$$

3. **a.** Déterminer les originaux $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$; $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p+5}\right)$; $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p}\right)$ et $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p+5}\right)$
   b. En déduire l'intensité $i(t) = \mathscr{L}^{-1}(I(p))$.

C. Étude de la tension de sortie

On note u la tension de sortie aux bornes de la résistance. On admet que, pour tout réel t, $u(t) = Ri(t)$. On a ainsi :

$$u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 10\left(1-\mathrm{e}^{-5t}\right) \text{ si } 0 \leqslant t < 2. \\ 10\mathrm{e}^{-5t}\left(\mathrm{e}^{10}-1\right) \text{ si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

On fournit le tableau de valeurs suivant, où $u(t)$ est arrondi au centième.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,1	2,25	2,5	3	5
$u(t)$	0	7,13	9,18	9,76	9,93	9,99	10	6,06	2,86	0,82	0,07	0

1. Sur le graphique de la partie A, représenter u sur l'intervalle $[0\,;5]$.
2. Déterminer à l'aide du graphique, la plus petite valeur t_0 de t telle que $t \geqslant 2$ et $u(t) \leqslant 5$.
   Laisser apparents sur la figure les tracés utilisés.