Brevet de technicien supérieur session 10 mai 2011 - groupement B2

EXERCICE 1 **12 points**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 3y' + 2y = -2\mathrm{e}^x + 6$ où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   (b) En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :
   $$(E_0) : \quad y'' - 3y' + 2y = 0.$$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x\mathrm{e}^x + 3$.
   (a) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   La fonction dérivée g' de la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g'(x) = 2\mathrm{e}^x$	$g'(x) = 2x\mathrm{e}^x$	$g'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^x$

   (b) Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)\mathrm{e}^x + 3$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) On admet le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.
2. (a) Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est : $f(x) = 2 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.
   (b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
   On veut justifier qu'au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite T. Recopier sur votre copie la justification exacte.

$\dfrac{3}{2}x^2$ est positif au voisinage de 0.	$x^2\varepsilon(x)$ est positif au voisinage de 0.	$2 + x$ est positif au voisinage de 0.

3. On admet que la fonction dérivée de f est donnée, pour tout x réel, par : $f'(x) = (2x+1)e^x$.
   (a) Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$ puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner la valeur approchée arrondie à 0,01 du minimum de la fonction f.
4. (a) On note $I = \displaystyle\int_0^{0,5} \left(2 + x + \frac{3}{2}x^2\right) \mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 1,1875$.
   (b) On note $K = \displaystyle\int_0^{0,5} (2x-1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 3 - 2\mathrm{e}^{0,5}$.
   (c) On note $J = \displaystyle\int_0^{0,5} f(x)\mathrm{d}x$.
   En utilisant la question précédente, déterminer la valeur exacte de J.
   (d) Vérifier que $J - I$ est inférieur à 2×10^{-2}.

EXERCICE 2 8 points

On considère un signal périodique correspondant à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et représentée sur le graphique fourni en annexe, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

Les questions 1. *et* 2. *sont des questions à choix multiples. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponsse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La fonction f est :

paire de période π	paire de période 2π	impaire de période π

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; \pi]$, $f(x) = \pi - x$.
   Si x appartient à l'intervalle $[-\pi ; 0]$, $f(x)$ s'écrit :

$f(x) = -x$	$f(x) = \pi + x$	$f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x$

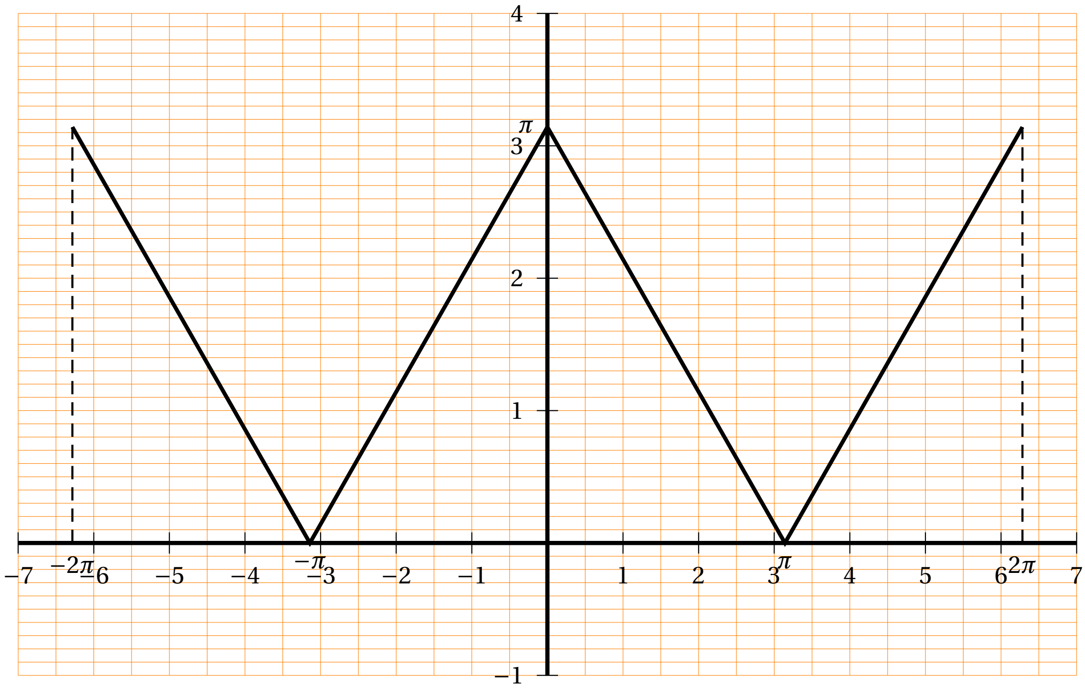
3. On note a_0, et, pour tout entier naturel non nul n, a_n et b_n les coefficients de Fourier de la fonction f.
   (a) Justifier que pour tout n non nul, $b_n = 0$.
   (b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} (\pi - x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
4. (a) Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :
   $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$ pour tout $n \geqslant 1$.
   Le résultat précédent n'est pas à démontrer.
   Déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.
   (b) On note s_3 la fonction correspondant au développement en série de Fourier de la fonction f, dans lequel on ne conserve que les termes d'indice n inférieur ou égal à 3.
   Écrire l'expression de $s_3(x)$.
5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{1}{9}\cos(3x)\right)$.
   (a) Compléter, à l'aide de la calculatrice, le tableau figurant sur la feuille annexe, avec les valeurs approchées de $f(x)$ et $g(x)$ arrondies à $0,01$.
   (b) On admet que la fonction g est décroissante sur $[0 ; \pi]$. Tracer, dans le repère donné en annexe, l'allure de la courbe représentative de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.
   (c) Compléter le graphique sur l'intervalle $[-\pi ; 0]$ sachant que la fonction g est paire.

ANNEXE À COMPLÉTER PUIS À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 2

Questions 1., 2. et 5.

Représentation graphique de f. Graphique à compléter aux questions 5. b. et 5. c.



Tableaux de valeurs à compléter à la question 5. a. :

x	0	0,5	1	1,5	$\frac{\pi}{2}$	2	2,5	3	π
$f(x)$			2,14						
$g(x)$			2,12						