∽ Brevet de technicien supérieur ∽
Métropole–Antilles–Guyane
session 2010 - groupement B2

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' - y = e^x - 2x$$

où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' - y = 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = xe^x + 2x + 2.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)e^x + 2x + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

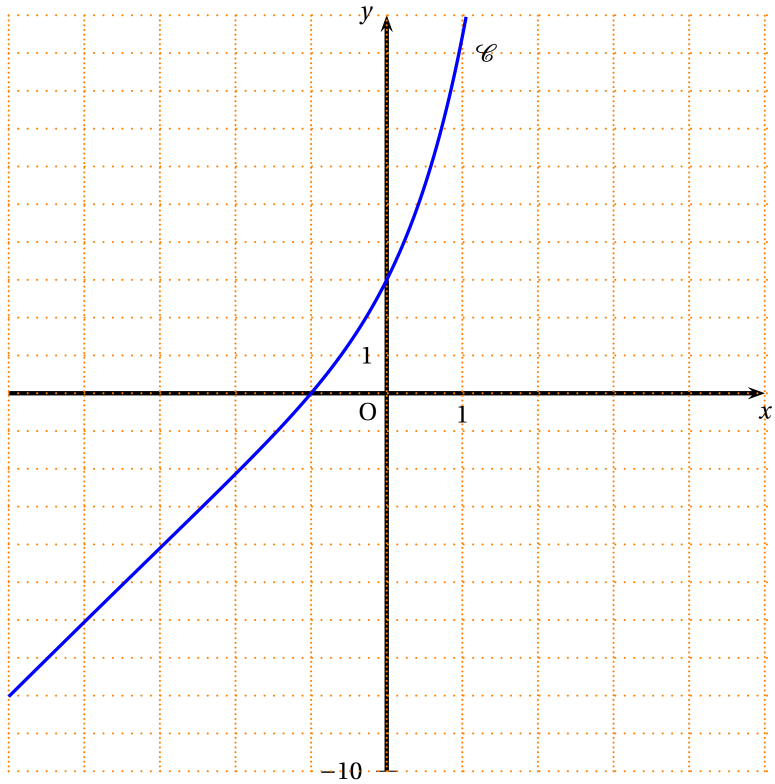
2. *Pour cette question, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.*
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $-\infty$ dont une équation est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = x + 1$	$y = 2x + 2$	$y = 2$

3. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 + 4x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Pour les question 3. b et 3. c, une seule réponse A, B, C est exacte. Indiquer sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.



b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
$y = 3$	$y = 3 + 4x$	$y = \frac{3}{2}x^2$

c. Au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C
au-dessus de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T pour tout x.	au-dessous de la tangente T quand $x < 0$ et au-dessus quand $x > 0$.

Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2x + 2)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = 4$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x + 1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}$.

3. a. On note $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, où f est la fonction définie dans la partie B.
Déduire de ce qui précède la valeur exacte de K.

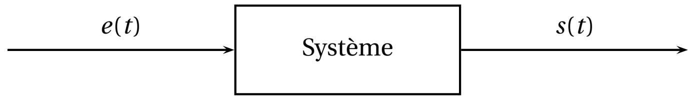
b. Donner la valeur de K, arrondie à 10^{-2}.

c. On admet que pour tout x de l'intervalle $[-1\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$.
Donner une interprétation graphique de K.

Exercice 2 **8 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un système, électrique ou mécanique. On note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie.



On note $E(P) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(P) = \mathscr{L}(s(t))$ où $\mathscr{L}$ est la transformation de Laplace.
La fonction de transfert H du système est définie par la relation : $S(P) = H(P) \times E(P)$.
On suppose que pour ce système la fonction de transfert est égale à :

$$H(P) = \frac{2p}{(p+1)^2+1}.$$

A. Réponse du système à un échelon

On suppose dans cette partie que $e(t) = \mathscr{U}(t)$ où $\mathscr{U}$ est la fonction échelon unité définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathscr{U}(t) = 0$ si $t < 0$; $\mathscr{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.

1. a. Déterminer $E(P)$.

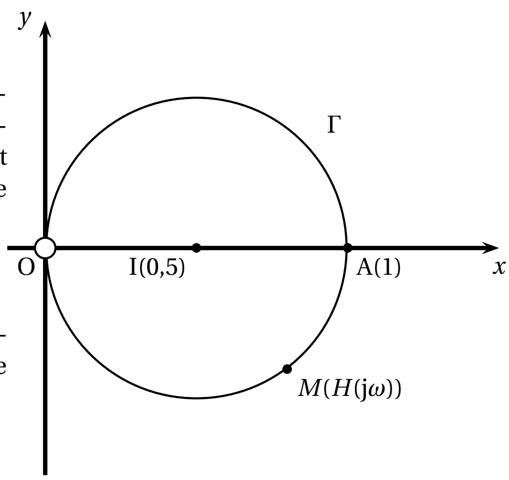
b. En déduire que $S(P) = \dfrac{2}{(p+1)^2+1}$.

2. a. Déterminer, à l'aide du formulaire, $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)$.

b. En déduire $s(t) = \mathscr{L}^{-1}[S(P)]$.

B. Recherche d'une pulsation particulière

On appelle « lieu de transfert » l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe $H(\mathrm{j}\omega)$ lorsque ω décrit $]0\ ;\ +\infty[$, où j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On admet que $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega}\right)}$.
On propose deux méthodes pour déterminer la pulsation ω pour laquelle le module $\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$ est maximal.



Les deux méthodes peuvent être traitées de façon indépendante.

1. *Méthode graphique*

On admet que le lieu de transfert Γ est le cercle de centre 1 d'affixe 0,5 et de rayon 0,5, privé du point O et représenté sur la figure ci-dessus.

a. Donner la position du point M sur Γ pour laquelle la distance OM est maximale.

b. En déduire la valeur de $H(\mathrm{j}\omega)$ pour laquelle le module $\left|H(\mathrm{j}\omega)\right|$ est maximal.

c. Déterminer la valeur ω_0 de ω telle que $H(\text{j}\omega) = 1$.

2. *Méthode analytique*

a. On considère la fonction r, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par $r(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}}$.

Montrer que, pour tout ω dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, le module $\left|H(\text{j}\omega)\right|$ vaut $r(\omega)$.

b. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant pour la dérivée r' de la fonction r :

$$r'(\omega) = \frac{-2\left(\omega+\sqrt{2}\right)\left(\omega-\sqrt{2}\right)\left(\omega^2+2\right)}{\left(\omega^4+4\right)^{3/2}}.$$

Ce résultat est admis et ne doit pas être démontré.

Par ailleurs, on admet que la fonction r possède un maximum unique ω_0 sur $]0\,;\,+\infty[$. Déterminer la valeur de ω_0 en utilisant l'expression $r'(\omega)$.

ω_0 est la pulsation de résonance du système.

Formulaire

$$\begin{tikzcd} f(t)\mathcal{U}(t) \arrow[rr, bend left, "\mathcal{L}"] & & F(p) \arrow[ll, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{L}[f] + \mu \mathcal{L}[g];$$
$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p};$$
$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a}\,;$$
$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}\,;$$
$$\mathcal{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = F(p+a)\,;$$
$$\mathcal{L}[f'(t)\mathcal{U}(t)] = pF(p) - f\left(0^+\right).$$