Brevet de technicien supérieur
Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie
session 2009 - groupement B2 Microtechniques

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' - 2y' + y = 8\mathrm{e}^x.$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E_0): \quad y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2\mathrm{e}^x$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(4x^2 - 4\right)\mathrm{e}^x$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4\left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^x$.
   b. Donner sans justification la valeur exacte et la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'abscisse de chacun des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
2. **a.** Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

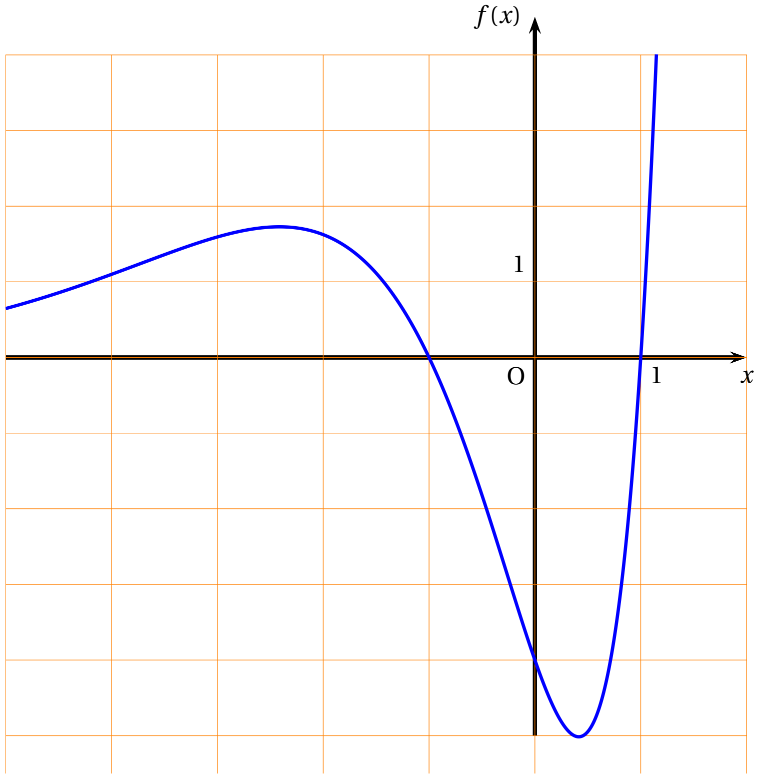
$$f(x) = -4 - 4x + 2x^2 + x^2\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

   b. Déduire du a. une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   c. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

Dans cette partie, les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. La fonction f définie au début de la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
   Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f''(x) + 2f'(x) + 8\mathrm{e}^x$.
   En déduire une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



2. **a.** Donner, sans justification, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$

   b. Dans cette question, on admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(4x^2 - 8x + 4\right)\mathrm{e}^x$ est une primitive de la fonction f.
   Déduire de ce qui précède l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 2 **8 points**

On considère un signal correspondant à la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T = 2\pi$ et telle que :

$$f(t) = \pi - t\ pour 0 \leqslant t < \pi \text{ et } f(t) = 0 \text{ pour } \pi \leqslant t < 2\pi.$$

Soit $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ le développement en série de Fourier associé à la fonction f

1. Tracer, dans un repère orthogonal, une représentation graphique de la fonction f, pour t appartenant à l'intervalle $[-2\pi\,;\,6\pi[$.
2. Montrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$.
3. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les intégrales suivantes, pour n entier non nul :

$$\int_0^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1-(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{n}.$$

   Ces résultats sont admis et n'ont donc pas à être démontrés.
   En déduire les expressions de a_n et de b_n en fonction de l'entier non nul n.

4. *Calcul d'une valeur approchée de la valeur efficace de f*

Pour tout entier n, on pose $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = |a_0|$, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f.

Le tableau suivant donne les valeurs de c_n, arrondies à 10^{-4}, pour n variant de 0 à 5.

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0,785 4	1,185 4	0,5	0,340 8	0,25	0,201 6

On note E_f la valeur efficace de la fonction f.

La formule de Parseval permet d'écrire :

$$\left(E_f\right)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

On obtient une valeur approchée de E_f en ne prenant pas en compte les harmoniques d'ordre supérieur ou égal à 6. On obtient alors une valeur approchée P du carré de la valeur efficace de f par la formule : $P = c_0^2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{n=5} c_n^2$.

Donner, en utilisant le tableau ci-dessus, une approximation décimale à 10^{-4} près de P.

5. *Comparaison avec la valeur exacte de la valeur efficace de f*

a. On rappelle que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\left(E_f\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$.

b. Déduire des questions précédentes une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du rapport $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$.

On peut observer ici que $\dfrac{P}{\left(E_f\right)^2}$ est inférieur à $0,95$. On constate ainsi que l'abandon des harmoniques d'ordre supérieur à 5 ne fournit pas une excellente approximation de $\left(E_f\right)^2$ dans le cas où, comme ici, les valeurs de c_n ne décroissent pas rapidement.

Formulaire pour les séries de Fourier

f : fonction périodique de période T.

Développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t},\ (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t\ (k \in \mathbb{Z})\ ;\ c_0 = a_0.$$

$$\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} = c_n\ ;\ \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} = c_{-n}\ (n \in \mathbb{N}^*).$$