Brevet de technicien supérieur session 2008 - groupement B

Exercice 1 **12points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x\mathrm{e}^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0.$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (-x-1)\mathrm{e}^x.$$

Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

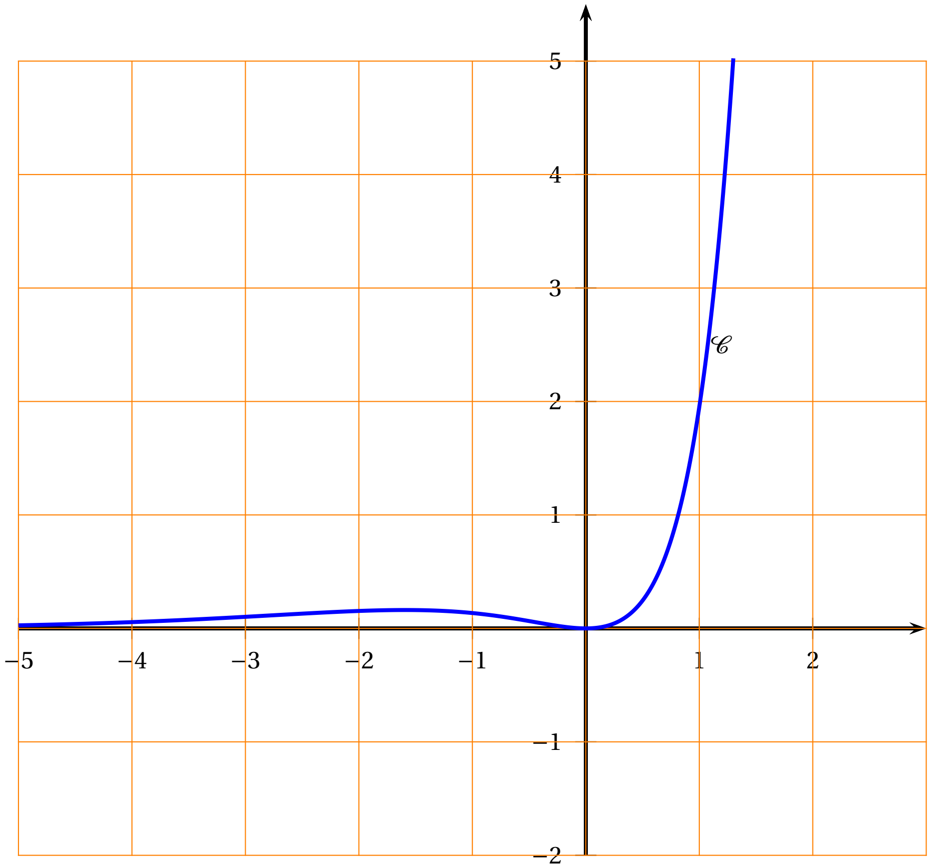
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

B. Étude locale d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^x.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée dans un repère orthogonal ci-dessous.



1. **a.** Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x - 2 - x\right)$.

   b. En déduire le coefficient directeur $f'(0)$ de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

2. **a.** Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$.

   b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. On note $I = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $I = 0,009$.

2. On note $J = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $J = 0,5\left(\mathrm{e}^{0,6} - \mathrm{e}^{-0,6}\right)$.

3. On note $K = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} (x+1)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.
   Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $K = 0,3\left(\mathrm{e}^{0,3} + \mathrm{e}^{-0,3}\right)$.

4. On note $L = \displaystyle\int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de L.

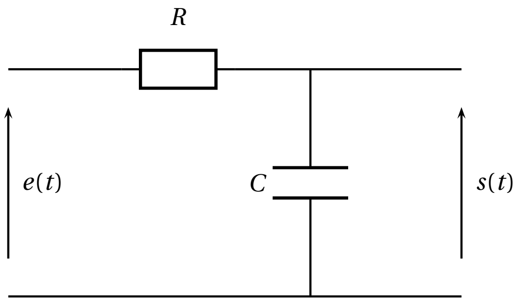
b. Donner la valeur approchée de L arrondie à 10^{-5}.

c. Vérifier que la valeur exacte de I et la valeur approchée de L obtenue à la question précédente différent de $4,5 \times 10^{-4}$.

Exercice 2 **8 points**

La question 5. de cet exercice peut-être traitée de façon indépendante

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté à tout instant t par une tension $e(t)$ et on note $s(t)$ la tension aux bornes du condensateur.



L'équation différentielle régissant ce circuit est

$$(1): \quad RCs'(t) + s(t) = e(t)$$

avec $s(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et où s' est la dérivée de la fonction s.
En utilisant la transformation de Laplace, on se propose de rechercher la tension $s(t)$ aux bornes du condensateur dans le cas suivant :

- $e(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t - O,1)$ où la fonction $\mathscr{U}$ est la fonction échelon unité définie par
  $\mathscr{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathscr{U}(t) = 1$ si $t \geqslant 0$;
- $R = 10\ \Omega$ et $C = O,004$F.

Pour cela on admet que les fonctions s, s' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$ et $S(p) = \mathscr{L}[s(t)]$.

1. Sur une feuille de papier millimétré, tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de e sur l'intervalle [0 ; 0,2]. On prendra comme unité 1 cm pour 0,02 sur l'axe des abscisses et 10 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

2. Déterminer $E(p) = \mathscr{L}[e(t)]$.

3. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), déterminer une expression de $S(p)$ en supposant que $s\left(0^+\right) = 0$.

b. Montrer que $S(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+25} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+25}\right)\mathrm{e}^{-0,1p}.$$

4. **a.** Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+25}\right]$.

b. En déduire $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+25}\right]\mathrm{e}^{-0,1p}$

c. En déduire la tension $s(t) = \mathscr{L}^{-1}[S(p)]$.

5. On admet que si $t \in [0\ ;\ 0,1[$, $s(t) = 1 - \mathrm{e}^{-25t}$ et si $t \in [0,1\ ;\ +\infty[$, $s(t) = \mathrm{e}^{-25t}\left(\mathrm{e}^{2,5} - 1\right)$.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

t	0	0,025	0,05	0,075	0,100	0,125	0,15	0,175	0,2
$s(t)$									

b. Construire une représentation de s sur le même graphique que celle de e.

Formulaire

$$f(t)\mathcal{U}(t) \underset{\mathscr{L}^{-1}}{\overset{\mathscr{L}}{\rightleftarrows}} F(p)$$

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g].$$

$$\mathscr{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}$$

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = F(p+a);$$

.

$$\mathscr{L}[f'(t)\mathcal{U}(t)] = pF(p) - f(O^{+});$$