Brevet de technicien supérieur
Groupement B2 session 2005
Conception et industrialisation en microtechniques

Exercice 1 **11 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(1+x)\,y' + y = \frac{1}{1+x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que les solutions sur $]-1;+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$(1+x)y' + y = 0$$

sont les fonctions définies par $h(x) = \dfrac{k}{x+1}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. Soit g la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

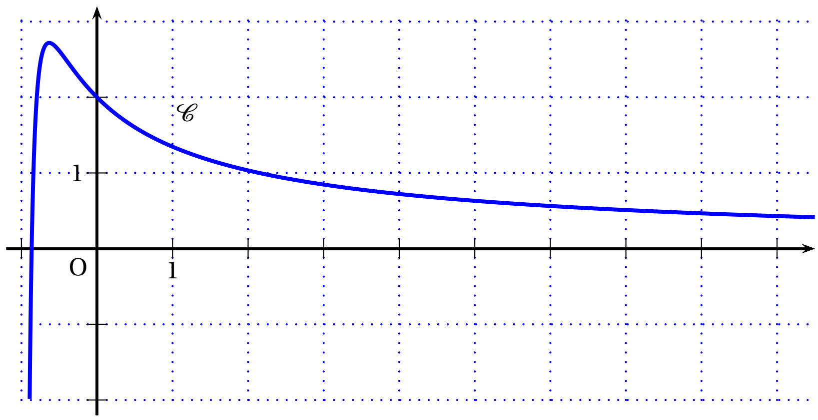
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 2$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$, dans un repère orthonormal où l'unité graphique est 1 cm, est donnée ci-dessous.



1. On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. **a.** Démontrer que, pour tout x de $]-1~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$

b. Résoudre dans $]-1~;~+\infty[$ l'inéquation $-1-\ln(1+x) \geqslant 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $]-1~;~+\infty[$.

c. Établir le tableau de variation de f.

3. Un logiciel de calcul formel donne le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f :

$$f(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\,\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Ce résultat, admis, n'a pas à être démontré.

a. En déduire une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ au voisinage de leur point d'abscisse 0.

C. Calcul intégral

1. Déterminer la dérivée de la fonction G définie sur $]-1~;~+\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\,[\ln(1+x)]^2$$

2. En déduire qu'une primitive de f sur $]-1~;~+\infty[$ est définie par :

$$F(x) = 2\ln(1+x) + \frac{1}{2}\,[\ln(1+x)]^2$$

3. **a.** On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que $I = \dfrac{1}{2}(\ln 3)^2 + 2\ln 3$.

b. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de I.

c. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu au b.

Exercice 2 **9 points**

Le but de cet exercice est de résoudre une équation différentielle intervenant en mécanique ou en électronique en utilisant deux méthodes.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

On se propose de déterminer la fonction f de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, vérifiant :

a) $4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t) = 20$ pour tout t de $[0~;~+\infty[$,
b) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

A. Première méthode

1. Déterminer l'ensemble des solutions, définies sur $[0~;~+\infty[$, de l'équation différentielle (E_0) :

$$4y'' + 8y' + 5y = 0.$$

2. Déterminer la constante k telle que la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = k$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) :

$$4y'' + 8y' + 5y = 20.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions, définies sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle (E) :

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

B. Deuxième méthode

1. On admet que la fonction f, nulle sur $]-\infty\ ;\ 0]$, et ses dérivées f' et f'' ont des transformées de Laplace. On note $F(p) = \mathscr{L}[f(t)]$ où F est la transformée de f.

- **a.** Donner, à l'aide du formulaire figurant ci-dessous, les expressions de $\mathscr{L}[f''(t)]$ et $\mathscr{L}[f'(t)]$ en fonction de $F(p)$.
  En déduire $\mathscr{L}[4f''(t) + 8f'(t) + 5f(t)]$ en fonction de $F(p)$.
- **b.** Déterminer $\mathscr{L}[20\mathscr{U}(t)]$ où $\mathscr{U}$ est l'échelon unité.
- **c.** Déduire des questions a. et b. que $F(p) = \dfrac{20}{p\left(4p^2 + 8p + 5\right)}$.

2. Dans la suite, on admet que $F(p)$ peut aussi s'écrire :

$$F(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25} - 2\frac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right).$$

- **a.** Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p}\right)$ où $\mathscr{L}^{-1}$ désigne la transformation de Laplace inverse.
- **b.** Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{p}{p^2 + (0,5)^2}\right)$ et en déduire $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{p+1}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$.
- **c.** Déterminer $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{p^2 + (0,5)^2}\right)$ et en déduire $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{0,5}{(p+1)^2 + 0,25}\right)$
- **d.** Déterminer alors la fonction f.

Formulaire

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}\ ;\ \mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\ ;\ \mathscr{L}[\cos(\omega t)\mathscr{U}(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)] = F(p+a);$$

$$\mathscr{L}[f'(t)\mathscr{U}(t)] = pF(p) - f(O^+);$$

$$\mathscr{L}[f''(t)\mathscr{U}(t)] = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right).$$