∽ Brevet de technicien supérieur novembre 2010 - groupement A ∾ Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **10 points**

On s'intéresse à un réjecteur de bande dont la fonction de transfert est donnée par :

$$T(\omega) = 2\frac{1+\left(\jmath\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1+\jmath\dfrac{\omega}{\omega_0}+\left(\jmath\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

où ω_0 désigne une constante strictement positive et ω un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On rappelle que $\jmath$ est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur les intervalles $[0\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.
3. En déduire que lorsque le nombre réel x décrit l'ensemble $[0\ ;\ 1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Partie B : étude du lieu de transfert

1. On pose, pour ω différent de ω_0, $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

   Vérifier que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme $T(\omega) = \dfrac{2}{1+\jmath f(x)}$.
2. **a.** Quel est l'ensemble D des points d'affixe $1+\jmath f(x)$ lorsque ω décrit l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ privé de ω_0 ?

   b. Tracer D dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

   Placer sur la figure le point M d'affixe $1+\jmath f(2)$.
3. **a.** En déduire l'ensemble C_1 des points d'affixe $\dfrac{1}{1+\jmath f(x)}$ puis, l'ensemble C_2 des points d'affixe $T(\omega)$.

   b. Tracer C_1 et C_2 sur la même figure que D.

   Placer sur la figure le point N d'affixe $\dfrac{1}{1+\jmath f(2)}$ et le point P d'affixe

   $T(2\omega_0) = \dfrac{2}{1+\jmath f(2)}$.
4. On définit $\varphi(x) = -\arctan[f(x)]$. Le réel $\varphi(x)$ est un argument de $T(\omega)$.

   Déterminer les limites de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, puis lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

   Quelle est la position limite du point d'affixe $T(\omega)$ lorsque ω tend vers ω_0 ?

Le graphique obtenu est le diagramme de Nyquist du réjecteur de bande. Ce filtre a pour fonction d'atténuer les fréquences voisines d'une fréquence donnée.

Exercice 2 **10 points**

On se propose d'étudier une méthode de compression utilisée pour stocker des données numériques issues d'images ou de sons. Cette méthode intervient, par exemple, dans les normes JPEG et MP3, sur des paquets de données de tailles bien supérieures à celle qui va être considérée ici.

Partie A (codage)

On considère un ensemble de trois données numériques :
$y_0 = 63,\ y_1 = 135,\ y_2 = 240.$
Ces valeurs sont interprétées comme l'échantillonnage d'un signal, représenté par une fonction f paire, périodique de période 6, telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(t) & = & y_0 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ f(t) & = & y_1 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \\ f(t) & = & y_2 \text{ si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{array}\right.$$

1. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 9]$.
2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.
   On note $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$.
   a. Déterminer les valeurs de ω et a_0.
   b. Établir que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :
   $$a_n = -\frac{2}{n\pi}\left(72\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + 105\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right).$$
   c. Déterminer b_n pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. **a.** Vérifier les égalités :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} y_0 + y_1 + y_2 & = & 3a_0 \\ y_0 - y_2 & = & \dfrac{a_1\pi}{\sqrt{3}} \\ y_0 - 2y_1 + y_2 & = & \dfrac{2a_2\pi}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$
   b. On prend $A_0 = a_0$ et on note A_1 et A_2 les valeurs approchées à l'entier le plus proche des nombres $\dfrac{1}{8} \times \dfrac{a_1\pi}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{1}{64} \times \dfrac{2a_2\pi}{\sqrt{3}}$.
   Déterminer les valeurs de A_1 et A_2.

Partie B (décodage)

Dans cette partie, à partir de la seule connaissance des entiers $A_0,\ A_1$ et A_2 on se propose d'obtenir des valeurs approchées, notées $z_0,\ z_1$ et z_2 des nombres $y_0,\ y_1$ et y_2.

1. Résoudre le système d'équations suivant dont les inconnues sont les nombres réels $z_0,\ z_1$ et z_2 :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 + z_1 + z_2 & = & 438 \\ z_0 - z_2 & = & -176 \\ z_0 - 2z_1 + z_2 & = & 64 \end{array}\right.$$
   On arrondira les résultats à l'entier le plus proche.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 6, telle que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} g(t) & = & z_0 \text{ si } 0 \leqslant t < 1 \\ g(t) & = & z_1 \text{ si } 1 \leqslant t < 2 \\ g(t) & = & z_2 \text{ si } 2 \leqslant t \leqslant 3 \end{array}\right.$$

a. Représenter, sur le graphique de la question 1, la fonction $f - g$.

b. Interpréter la différence $f - g$.

Nos sens discernent plus ou moins bien les variations d'un signal sonore ou lumineux suivant la rapidité de cette variation.
Les données numériques issues d'images ou de sons sont donc traduites sous forme fréquentielle.

Les divisions par 8 *et* 64 *permettent de réduire la place en mémoire. C'est un moyen pour réaliser la compression.*