Brevet de technicien supérieur
novembre 2009 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **11 points**

Dans cet exercice, on s'intéresse à un système entrée-sortie.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude du système pour une entrée nulle

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \quad (E_1)$$

où y désigne une fonction de la variable t, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_1)
2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E_1) qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

   La représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ est donnée sur la feuille annexe.

Partie B : étude du système soumis à un contrôle

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$.
On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 2U(t) - 2U\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

   a. Construire la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthogonal.

   b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e. Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction causale s, telle que :

$$4\int_0^t s(u)\,\mathrm{d}u + s'(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s\left(0^+\right) = 0.$$

   On admet que la fonction s et sa dérivée possèdent chacune une transformée de Laplace.

   On note S la transformée de Laplace de la fonction s.

   a. Déterminer une expression de $S(p)$.

   b. En déduire une expression de $s(t)$.

3. **a.** Vérifier que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) & = & \sin(2t) & \text{si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{4} \\ s(t) & = & \sin(2t) - \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{si } t \geqslant \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

b. Établir que : $s\left(\dfrac{\pi^-}{4}\right) = s\left(\dfrac{\pi^+}{4}\right)$.

c. Vérifier que pour tout nombre réel t supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$s(t) = \sqrt{2}\cos\left[2\left(t - \frac{\pi}{8}\right)\right].$$

d. Résoudre l'équation $s(t) = 0$ sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$.

4. Tracer successivement sur la feuille annexe, à rendre avec la copie, les courbes représentatives sur l'intervalle $[0~;~2\pi]$ des fonctions :

$t \longmapsto \cos(2t)$, $\quad t \longmapsto \cos\left[2\left(t - \dfrac{\pi}{8}\right)\right]$ $\quad$ et $t \longmapsto s(t)$.

Exercice 2 **9 points**

Partie A :

Une entreprise fabrique des pièces en grande série.
Une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.
L'entreprise dispose d'une machine de contrôle des pièces fabriquées.
On prélève une pièce au hasard dans la production.
On note C l'évènement : « la pièce est conforme ».
On note A l'évènement : « la pièce est acceptée par la machine de contrôle ».
Une étude statistique a été conduite, au terme de laquelle on a pu estimer que :

$$p(A) = 0,95,\ p\left(C \cap \overline{A}\right) = 0,01 \text{ et } p\left(\overline{C} \cap A\right) = 0,005.$$

1. a. À l'aide d'une phrase, donner la signification des évènements $C \cap \overline{A}$ et $\overline{C} \cap A$.
Ces deux évènements correspondent aux cas où la machine de contrôle commet une erreur.

b. Calculer la probabilité que la machine de contrôle commette une erreur.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme, sachant qu'elle est refusée.

Partie B :

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la masse d'une pièce en grammes.
On admet que X suit une loi normale de moyenne 7,5 et d'écart type σ où σ désigne un nombre réel strictement positif.

1. Après une période de production, la machine de fabrication a subi un dérèglement brutal.
L'écart type σ vaut alors $0,015$.
On rappelle qu'une pièce est conforme si sa masse, en grammes, est comprise entre 7,495 et 7,505.

2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

3. Calculer la valeur de σ pour laquelle la probabilité qu'une pièce soit conforme est égale à $0,99$.

4. Dans cette question, on suppose que σ vaut 0,002 et qu'à la suite d'un nouveau dérèglement, la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $7,502$ et d'écart type $0,002$.
Calculer la probabilité qu'une pièce, choisie au hasard, soit conforme.

Partie C :

Les pièces acceptées par la machine de contrôle sont emballées par lots de 100. On prélève au hasard un lot. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 pièces.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 100 pièces, associe le nombre de pièces non conformes.
On admet que la probabilité qu'une pièce soit non conforme, sachant qu'elle a été acceptée, est 0,005 3.

1. **a.** Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Donner l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

2. Calculer la probabilité qu'un lot ne contienne que des pièces conformes. On donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-2} près.

Annexe à rendre avec la copie