Brevet de technicien supérieur novembre 2008 - groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **12 points**

On désigne par α un nombre réel positif tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
On considère la fonction f définie sur R, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(t) & = & 1 & \text{si} & 0 \leqslant t \leqslant \alpha \\ f(t) & = & 0 & \text{si} & \alpha < t < \pi - \alpha \\ f(t) & = & -1 & \text{si} & \pi - \alpha \leqslant t \leqslant \pi \end{array}\right.$$

1. **Dans cette question**, le nombre réel α vaut $\dfrac{\pi}{3}$.
   Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.
2. On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f
   On note $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right)$.
   Le but de cette question est de calculer les coefficients de la série de Fourier S pour une valeur quelconque du nombre réel α tel que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.
   a. Calculer a_0, valeur moyenne de la fonction f sur une période.
   b. Déterminer b_n, n désignant un nombre entier naturel strictement positif.
   c. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a :
   $$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]\sin(n\alpha).$$
3. Déterminer la valeur α_0 de α pour laquelle on a $a_3 = 0$.
4. **Pour toute la suite de l'exercice**, on se place dans le cas où $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

   Rappels :
   Si h désigne une fonction périodique de période T, le carré de la valeur efficace H de la fonction h sur une période est :
   $$H^2 = \frac{1}{T}\int_r^{r+T} [h(t)]^2\, \mathrm{d}t.$$
   r désignant un nombre réel quelconque.
   Si les coefficients de Fourier de la fonction h sont a_0, a_n et b_n alors :
   $$\frac{1}{T}\int_r^{r+T} [h(t)]^2\, \mathrm{d}t = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \quad \text{formule de Parseval}$$
   a. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   b. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par :
   $$g(t) = a_0 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin t + a_2 \cos(2t) + b_2 \sin(2t).$$
   Montrer que $g(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}\cos(t)$ pour tout nombre réel t.
   c. Calculer G^2, carré de la valeur efficace de la fonction g sur une période.

d. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient $\dfrac{G^2}{F^2}$.

Ce dernier résultat montre que la fonction g constitue une assez bonne approximation de la fonction f.

Exercice 2 **10 points**

On s'intéresse à un système entrée-sortie.
Dans les parties A et B, on étudie la réponse de ce système à deux entrées différentes.
Les parties A et B sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = 8 \quad (\mathrm{E}_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t.

1. **a.** Donner la solution particulière constante de l'équation différentielle (E_1).
   b. Déterminer la solution générale de l'équation (E_1).
2. **a.** Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 2[1 - \cos(2t)].$$

   b. La fonction f est périodique. En donner une période.
   Préciser, sans justification, le maximum et le minimum de la fonction f.
   c. Représenter la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

Partie B

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl l} U(t) & = & 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
On considère la fonction e définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$e(t) = 8\left[U(t) - U\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + U(t-\pi) - U\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

On considère la fonction causale g qui vérifie les conditions $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$, ainsi que la relation (E_2) suivante :

$$y''(t) + 4y(t) = e(t) \quad (\mathrm{E}_2)$$

On admet que la fonction g possède une transformée de Laplace notée G.

1. **a.** Représenter la fonction e sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.
   b. On appelle $\mathscr{E}$ la transformée de Laplace de la fonction e.
   Déterminer $\mathscr{E}(p)$.
2. **a.** En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation (E_2), montrer que :

$$G(p) = \frac{8}{p\left(p^2+4\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-p\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{-p\pi} - \mathrm{e}^{-p\frac{3\pi}{2}}\right).$$

b. Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = 2[1 - \cos(2t)]U(t)$ a pour transformée de Laplace la fonction H définie par

$$H(p) = \frac{8}{p\left(p^2 + 4\right)}.$$

c. Donner une expression de la fonction g, en utilisant éventuellement la fonction h.

3. a. On donne les expressions de $g(t)$ sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ et $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,+\infty\right[$:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} g(t) & = & -4\cos(2t) & \text{si} & t \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[\\ g(t) & = & -8\cos(2t) & \text{si} & t \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;\,+\infty\right[\end{array}\right.$$

Donner des expressions similaires de $g(t)$ pour les intervalles $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

b. On a représenté sur **l'annexe, à rendre avec la copie** la fonction g sur les intervalles $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ et $\left[\frac{3\pi}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Compléter le graphique en traçant la représentation graphique de g sur les intervalles $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Annexe

à rendre avec la copie