

∞ **Brevet de technicien supérieur Métropole** ∞
session 2009 - groupement A2

Exercice 1

9 points

Le but de cet exercice est d'établir, avec un minimum de calculs, le développement en série de Fourier de fonctions périodiques rencontrées en électricité.

1. On considère un entier n strictement positif. Montrer que :

$$\int_0^1 t \cos(n\pi t) dt = \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2}.$$

Pour la suite de l'exercice, on admet que : $\int_0^1 t \sin(n\pi t) dt = -\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$.

2. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2, telle que :

$$\begin{cases} f(t) = t \text{ sur } [0; 1[\\ f(t) = 0 \text{ sur } [1; 2[\end{cases}.$$

- a. En utilisant le document réponse n° 1, à rendre avec la copie, tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-4; 4]$.
- b. On appelle S_f la série de Fourier associée à la fonction f . On note

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)).$$

Calculer a_0 .

Donner les valeurs des coefficients a_n et b_n , et en déduire que :

$$S_f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi t) \right).$$

- c. Calculer le carré de la valeur efficace de la fonction f , définie par

$$\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \int_0^2 (f(t))^2 dt.$$

- d. Recopier et compléter, avec les valeurs exactes le tableau ??.

n	1	2	3
a_n			
b_n			

- e. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel A défini par :

$$A = \frac{a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 (a_n^2 + b_n^2)}{\mu_{\text{eff}}^2}.$$

3. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2, dont la courbe représentative \mathcal{C}_g est tracée sur l'intervalle $[-4; 4]$ dans le document réponse n° 1.

On admet que le développement en série de Fourier S_g associé à la fonction g , est défini par $S_g(t) = S_f(-t)$.

Justifier que :

$$S_g(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi t) + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi t) \right).$$

4. Soit h et k les fonctions définies sur \mathbb{R} , périodiques de période 2, telles que : $h(t) = f(t) + g(t)$ et $k(t) = f(t) - g(t)$ pour tout nombre t .

- a. Sur le document réponse n° 1, à rendre avec la copie, tracer les courbes \mathcal{C}_h et \mathcal{C}_k représentatives des fonctions h et k sur l'intervalle $[-4; 4]$.
- b. On admet que les développements en série de Fourier S_h et S_k associés respectivement aux fonctions h et k , sont définis par :

$$S_h(t) = S_f(t) + S_g(t) \quad \text{et} \quad S_k(t) = S_f(t) - S_g(t).$$

Déterminer les coefficients de Fourier associés respectivement aux fonctions h et k .

Exercice 2

11 points

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».

La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.

Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de 0,1 seconde.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur \mathbb{R} est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u) du = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1 .

1. Montrer que $S_1(p) = \frac{1}{p+1}$.

2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t .

La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse**.

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u) \, du = U(t) - U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2 .

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t) = U(t) - U(t-1).$$

2. Déterminer $S_2(p)$.
3. a. En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t .
- b. Justifier que :

$$\begin{cases} s_2(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s_2(t) = e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s_2(t) = -e^{-t}(e-1) & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
5. Calculer $s_2(1^+) - s_2(1^-)$.
6. On appelle \mathcal{C}_2 la courbe représentative de la fonction s_2 .
- a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

- b. Compléter le tracé de la courbe \mathcal{C}_2 sur la figure 2 du document réponse, à rendre avec la copie.

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t) + \int_0^t s_3(u) \, du = U(t) - U(t-1) + U(t-1, 1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :
 $e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1, 1)$.
 - a. Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $] -\infty; 1, 1[$.
 - b. Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geq 1, 1$.
 - c. Représenter graphiquement la fonction e_3 .

Pour la suite, on admet que :

$$\begin{cases} s_3(t) = s_2(t) & \text{si } t < 1, 1 \\ s_3(t) = e^{-t}(1 - e + e^{1,1}) & \text{si } t \geq 1, 1. \end{cases}$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1, 1; +\infty[$.

3. Calculer $s_3(1, 1^+) - s_3(1, 1^-)$.
4. On appelle \mathcal{C}_3 la courbe représentative de la fonction s_3 .

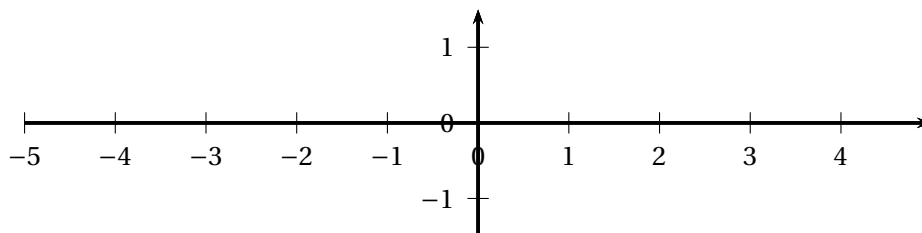
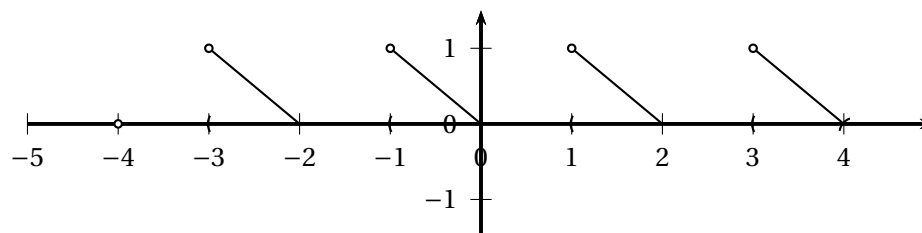
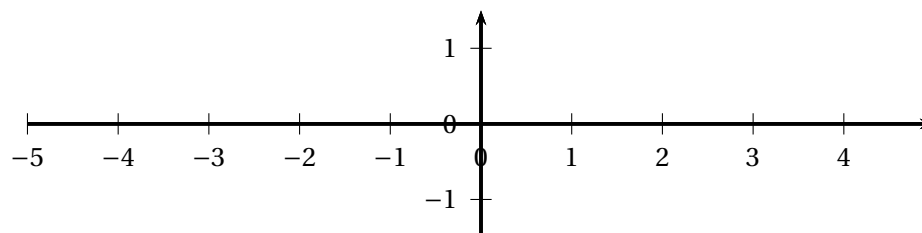
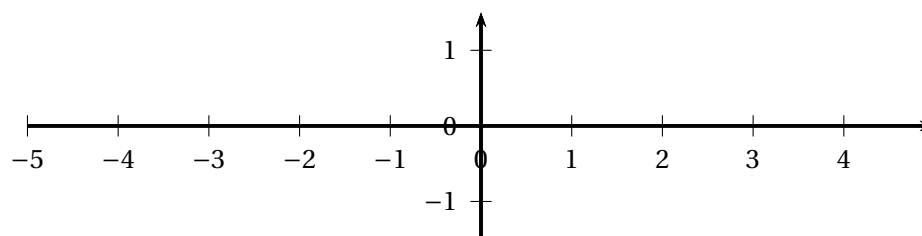
a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

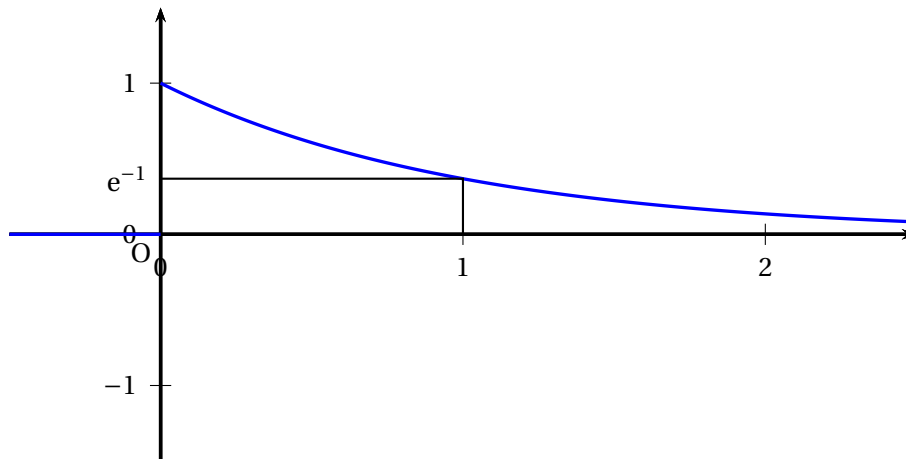
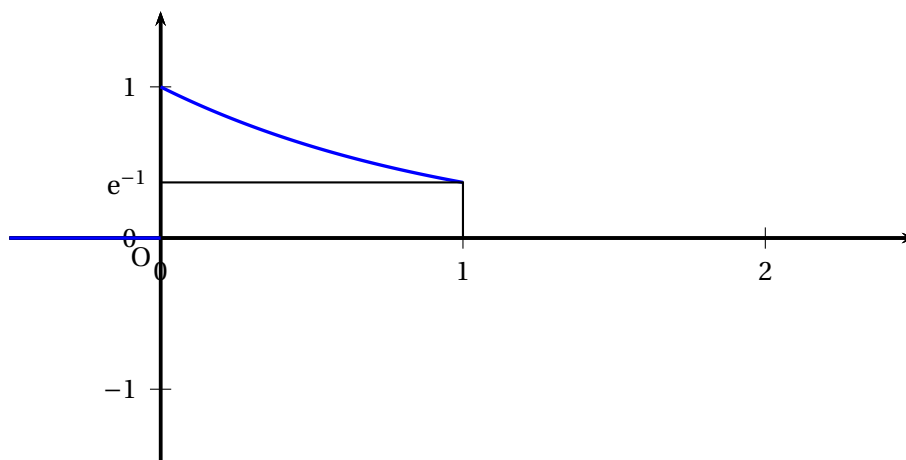
Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

- b. Compléter le tracé de la courbe \mathcal{C}_3 sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie.

Document réponse n° 1, à rendre avec la copie (exercice 1)

Figure 1 : représentation de la fonction f Figure 2 : représentation de la fonction g Figure 2 : représentation de la fonction h Figure 2 : représentation de la fonction k 

Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 2)

Figure 1 : représentation de la fonction s_1 Figure 2 : représentation de la fonction s_2 Figure 3 : représentation de la fonction s_3 