∾ Brevet de technicien supérieur ∾
Métropole session 2010 - groupement A2

Exercice 1 **10 points**

Spécialité IRIST

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On rappelle qu'une courbe de Bézier associée à $n+1$ points de contrôle successifs A_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{\text{O}A_i} \quad \text{où } B_{i,n}(t) = \text{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i} \text{ avec } t \in [0\,;\,1].$$

Partie A

L'objectif de cette partie est d'étudier la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ associée aux quatre points de contrôle successifs A(4 ; 0), S(12 ; 6), R(0 ; 6) et O(0 ; 0).

1. Développer, réduire et ordonner le polynôme $B_{2,\,3}(t)$.
2. On admet que :

$$\begin{array}{rcl} B_{0,3}(t) & = & -t^3+3t^2-3t+1 \\ B_{1,3}(t) & = & 3t^3-6t^2+3t \\ B_{3,3}(t) & = & t^3. \end{array}$$

   Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & f_1(t) = 32t^3-60t^2+24t+4 \\ y & = & g_1(t) = -18t^2+18t \end{array}\right. \quad \text{pour } t \in [0\,;\,1].$$

3. En utilisant la courbe $\mathscr{C}_1$ tracée sur le **document réponse nº 1**, compléter le tableau des variations conjointes des deux fonctions f_1 et g_1 figurant sur ce même document réponse.
4. Calculer la dérivée de la fonction g_1.
   En déduire la valeur t_1 du paramètre t pour laquelle l'ordonnée du point $M(t)$ est maximale.
5. Déterminer la valeur t_0 du paramètre t pour laquelle l'abscisse du point $M(t)$ est maximale.
6. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point A.

Partie B

On désigne par a un nombre réel.
On souhaite compléter la figure du **document réponse nº 1** avec une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ en respectant les contraintes suivantes :

- les points de contrôle successifs de la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ sont O(0 ; 0), E(0 ; a), $\text{F}\left(\frac{4}{3}\,;\,-2\right)$ et A(4 ; 0) ;
- la courbe $\mathscr{C}_2$ passe par le point $\text{G}\left(1\,;\,-\frac{3}{2}\right)$ pour la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre t.

Sous ce système de contraintes, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont des tangentes communes aux points A et O.

1. Dans les conditions énoncées ci -dessus; la représentation paramétrique de la courbe $\mathscr{C}_2$ est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & f_2(t) = 4t^2 \\ y & = & g_2(t) = 3(a+2)t^3-6(a+1)t^2+3at \end{array}\right. \quad t \in [0\,;\,1].$$

   Montrer que $a = -2$.

2. Pour chaque valeur de t, l'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau), permet de construire, le point de paramètre t de la courbe de Bézier.

Utiliser cet algorithme, pour la valeur $\dfrac{1}{2}$ du paramètre t, pour retrouver graphiquement la position du point G.

Laisser apparentes les étapes de la construction.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_2$ sur le **document réponse n^o^ 1**.

Exercice 2 **10 points**

On considère un système physique dont l'état est modélisé par la fonction y de la variable réelle t, solution de l'équation différentielle :

$$y''(t)+4y(t)=e(t) \quad (1),$$

où la fonction e représente une contrainte extérieure au système.

Partie A

Dans cette partie, on suppose que $e(t)=20$ pour tout nombre réel t. L'équation différentielle (1) s'écrit alors sous la forme :

$$y''(t)+4y(t)=20 \quad (2).$$

1. Déterminer la fonction constante h solution particulière de l'équation différentielle (2).

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (2).

En déduire l'expression de la fonction f solution de l'équation différentielle (2) qui vérifie les conditions $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie un moyen d'amener le système vers un état d'équilibre de manière « lisse ».

À cette fin, on soumet le système à une contrainte extérieure modélisée par la fonction e définie par :

$$e(t)=8tU(t)-8(t-\tau)U(t-\tau),$$

où τ désigne un nombre réel strictement positif.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcccl} U(t) & = & 0 & \text{si} & t<0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si} & t\geqslant 0. \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

On appelle g la fonction causale telle que :

$$g''(t)+4g(t)=e(t)$$

et vérifiant :

$$g(0)=0 \quad \text{et} \quad g'(0)=0.$$

On note $G(p)$ la transformée de Laplace de la fonction g et $E(P)$ la transformée de Laplace de la fonction e.

1. Exprimer $E(P)$ en fonction de p et de τ.

2. En déduire que :

$$G(p)=\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-\tau p}\right)$$

3. Déterminer les constantes réelles A et B telles que :

$$\frac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p^2+4}$$

4. Déterminer alors l'original de $\dfrac{8}{p^2\left(p^2+4\right)}$

5. En déduire que, pour tout nombre réel t :

$$g(t)=g_0(t)-g_0(t-\tau)\quad \text{avec } g_0(t)=(2t-\sin(2t))U(t).$$

6. Montrer que pour $t\geqslant\tau$, on a :

$$g(t)=2\tau-\sin(2t)+sin(2t-2\tau).$$

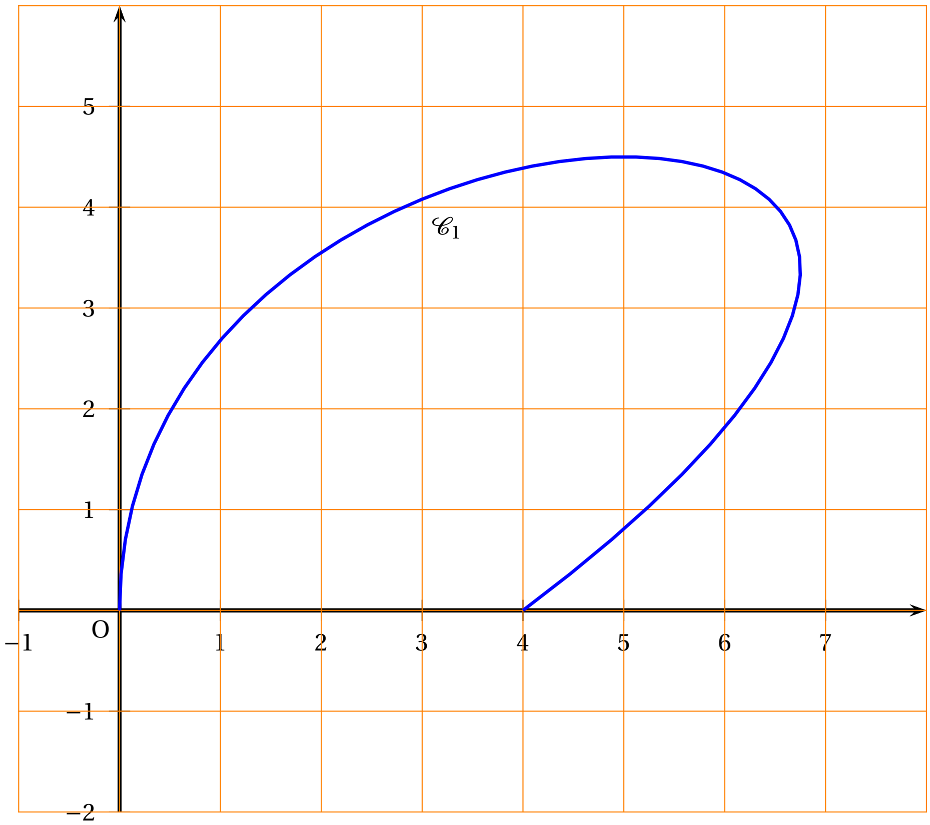
7. On suppose maintenant que $\boldsymbol{\tau=\pi}$.

a. Simplifier l'expression de $g(t)$ pour $t\geqslant\tau$.

b. La courbe représentative de la fonction e, pour $\tau=\pi$, est tracée sur la figure du **document réponse n° 2**.

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction g.

Document réponse n° 1, à rendre avec la copie (exercice 1)



t	0		t_0	t_1	1
$f_1'(t)$		+	0	−	0
$g_1'(t)$					
$f_1(t)$					
$g_1(t)$					

Document réponse n° 2, à rendre avec la copie (exercice 2)