Brevet de technicien supérieur session 2009 - groupement A1 Métropole

Exercice 1 **9 points**

Cet exercice se compose de trois parties qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
On s'intéresse aux requêtes reçues par le serveur web d'une grande entreprise, provenant de clients dispersés sur le réseau Internet.
La réception de trop nombreuses requêtes est susceptible d'engendrer des problèmes de surcharge du serveur.

Partie A :

Dans cette partie, on s'intéresse au nombre de requêtes reçues par le serveur, au cours de certaines durées jugées critiques.
On désigne par τ un nombre réel strictement positif. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de requêtes reçues par le serveur dans un intervalle de temps de durée τ (exprimée en secondes). La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\tau$.

1. Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,01$.
   Déterminer la probabilité que le serveur reçoive au plus une requête au cours d'une durée τ de 0,01 s.
   En expliquant votre démarche, déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $p\left(X > n_0\right) < 0,05$.
   Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\tau = 0,2$.
   On rappelle que la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$ peut être approchée par la loi normale de moyenne $\mu = 100$ et d'écart type $\sigma = 10$.
   En utilisant cette approximation, calculer :
   a. la probabilité $P(X > 120)$;
   b. une valeur approchée du nombre réel positif a tel que
   $P(100 - a \leqslant X \leqslant 100 + a) = 0,99$.

Partie B :

Dans cette partie, on considère :
— d'une part, que la probabilité pour le serveur de connaître des dysfonctionnements importants au cours d'une journée donnée est $p = 0,01$;
— d'autre part, que des dysfonctionnements importants survenant au cours de journées distinctes constituent des évènements aléatoires indépendants.

1. On appelle Y la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'un mois de 30 jours.

   a. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
   Préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité que le serveur connaisse au plus 2 jours de dysfonctionnements importants pendant un mois.

2. On appelle Z la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où le serveur connaît des dysfonctionnements importants au cours d'une année de 365 jours.

a. Donner, sans justification, la loi de probabilité de la variable aléatoire Z.

b. Donner l'espérance mathématique et l'écart type de la variable aléatoire Z.

Partie C :

Dans cette partie. on s'intéresse à la durée séparant deux requêtes successives reçues par le serveur.
On appelle T la variable aléatoire qui prend pour valeurs les durées (exprimées en secondes) séparant l'arrivée de deux requêtes successives sur le serveur.

1. On désigne par t un nombre réel positif. La probabilité que T prenne une valeur inférieure ou égale à t est donnée par : $p(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t 500\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer $P(T \leqslant t)$ en fonction de t.

b. En déduire la valeur de t pour laquelle $P(T \leqslant t) = 0,95$. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée au millième de seconde.

2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale

$$I(t) = \int_0^t 500x\mathrm{e}^{-500x}\,\mathrm{d}x.$$

b. Déterminer la limite m de $I(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

Le nombre m est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T. Il représente la durée moyenne séparant la réception de deux requêtes successives.

Commentaire :
Ce modèle, très simple, intéresse les concepteurs de systèmes d'information ou de télécommunication car il fournit des évaluations de certaines performances d'un système, en particulier au sens du « scénario du pire des cas ».

Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on étudie un système « entrée-sortie ».
La partie A permet de déterminer la réponse à l'échelon unité.
Les parties B et C permettent d'étudier les perturbations résultant d'une coupure de $0,1$ *seconde.*

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} U(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) & = & 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

Partie A :

On considère la fonction causale s_1 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_1(t) + \int_0^t s_1(u)\,\mathrm{d}u = U(t).$$

On note S_1 la transformée de Laplace de la fonction s_1.

1. Montrer que $S_1(p) = \dfrac{1}{p+1}$.
2. En déduire $s_1(t)$ pour tout nombre réel t.
   La courbe représentative de la fonction s_1 est donnée par la **figure 1 du document réponse.**

Partie B :

On considère la fonction causale s_2 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_2(t) + \int_0^t s_2(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1).$$

On note S_2 la transformée de Laplace de la fonction s_2.

1. Représenter graphiquement la fonction e_2 définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e_2(t) = U(t) - U(t-1).$$

2. Déterminer $S_2(p)$.
3. **a.** En déduire $s_2(t)$ pour tout nombre réel t.
   b. Justifier que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_2(t) & = & 0 & \text{si } t < 0 \\ s_2(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ s_2(t) & = & -\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) & \text{si } t \geqslant 1 \end{array}\right.$$

4. Établir le sens de variation de la fonction s_2 sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$.
5. Calculer $s_2\left(1^+\right) - s_2\left(1^-\right)$.
6. On appelle $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction s_2.
   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1	1,1	1,5	2	2,5
$s_2(t)$					

   Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
   b. Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$ sur la figure 2 du document réponse, à rendre avec la copie.

Partie C :

On considère la fonction causale s_3 telle que, pour tout nombre réel t :

$$s_3(t) + \int_0^t s_3(u)\,\mathrm{d}u = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1).$$

1. Soit la fonction e_3 définie sur l'ensemble des nombres réels par :
   $e_3(t) = U(t) - U(t-1) + U(t-1,1)$.

a. Montrer que $e_3(t) = e_2(t)$ pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;\,1,1[$.

b. Déterminer $e_3(t)$ pour $t \geqslant 1,1$.

c. Représenter graphiquement la fonction e_3.

Pour la suite, on admet que :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s_3(t) & = & s_2(t) & \text{si } t < 1,1 \\ s_3(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\left(1-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1,1}\right) & \text{si } t \geqslant 1,1. \end{array}\right.$$

2. Établir le sens de variation de la fonction s_3 sur l'intervalle $]1,1\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $s_3\left(1,1^+\right) - s_3\left(1,1^-\right)$.

4. On appelle $\mathscr{C}_3$ la courbe représentative de la fonction s_3.

a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	1,1	1,5	2	2,5
$s_3(t)$				

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

b. Compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}_3$ sur la figure 3 du document réponse, à rendre avec la copie.