# Brevet de technicien supérieur session 2008 - groupement A (électrotechnique)

**Exercice 1** **11 points**

On rappelle que la fonction échelon unité $U$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

**1.** On considère la fonction causale $e$ définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4\left[U(t) - U(t-2)\right]$$

**a.** Tracer la représentation graphique de la fonction $e$ dans un repère orthonormal.

**b.** On note $E$ la transformée de Laplace de la fonction $e$.
Déterminer $E(p)$.

**2.** On considère la fonction $s$ telle que

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0$$

On admet que la fonction $s$ admet une transformée de Laplace, notée $S$.
Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$$

**3.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que :

$$\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}$$

**4.** Compléter le tableau ci-dessous dans lequel $f$ représente la fonction causale associée à $F$ :

| $F(p)$ | $\dfrac{1}{p}$ | $\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$ | $\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}$ | $\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | $U(t)$ | | | |

**5. a.** Déterminer $s(t)$, $t$ désignant un nombre réel quelconque.

**b.** Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

**6. a.** Justifier que la fonction $s$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2[$.

**b.** Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} s(t)$.

**7.** **a.** Déterminer le sens de variation de la fonction $s$ sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

**b.** Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

**8.** Tracer la courbe représentative de la fonction $s$ dans un repère orthonormal.

**Exercice 2** **9 points**

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par $E$ un nombre réel de l'intervalle $]0\,;\,3[$.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} E \times t & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ (3-E)t + 2E - 3 & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 3 & \text{si } 2 \leqslant t \leqslant \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

**Partie A :**

Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où $E = 2$.

**1.** Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0\,;\,1[$, $[1\,;\,2[$ et $\left[2\,;\,\dfrac{5}{2}\right]$.

**2.** Représenter graphiquement la fonction $f$ sur l'intervalle $[-5\,;\,10]$.

**Partie B :**

Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de $E$ n'est pas spécifiée.
On appelle $S$ la série de Fourier associée à la fonction $f$.
On note $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

**1.** Montrer que la valeur moyenne de la fonction $f$ sur une période est $a_0 = 2\dfrac{E+3}{5}$.

**2.** Déterminer $b_n$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.

**3.** **a.** Montrer que pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t = \frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) - 1\right).$$

**b.** On a calculé les intégrales $\int_1^2 f(t)\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$ et $\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$.

On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t = \frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E\right).$$

En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right) + (3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right) - E\right).$$

**4.** Pour tout nombre entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1, on appelle $u_n$ l'harmonique de rang $n$.

On a alors

$u_n(t) = a_n \cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right) + b_n \sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel $t$.

**a.** Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel $t$.

**b.** On appelle $E_0$ la valeur de $E$ pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de $E$ telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel $t$.

Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à $10^{-2}$ près, de $E_0$.

*Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.*
*Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ permettra :*

- ✓ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
- ✓ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
- ✓ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*