Brevet de technicien supérieur session 2002 - Groupement E

Exercice 1 **12 points**

1. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 9x^2 + 24x\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

   a. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;\,5]$.

   c. Dresser le tableau des variations de f.

   d. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ à l'origine O du repère.

   e. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T.

2. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $g(x) = -x^2 + ax + b$.
Déterminer les réels a et b sachant que la courbe représentative de g passe par l'origine O du repère et par le point A de coordonnées $(5\,;\,5)$.

3. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,5]$ par $h(x) = -x^2 + 6x$.

   a. Calculer $h'(x)$ où h' désigne la fonction dérivée de h.
   Étudier le signe de $h'(x)$ lorsque x varie dans $[0\,;\,5]$.

   b. Dresser le tableau des variations de h.

   c. Montrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$ ont, en O, la même tangente T.

   d. Construire la courbe $\mathscr{C}_h$ dans le même repère que précédemment.

4. Soit $\mathscr{S}$ la partie du plan comprise entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$. Calculer l'aire de $\mathscr{S}$ en cm^2 ; on en donnera la valeur exacte et une valeur arrondie au centième.

5. Construire les images $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_h$, de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$, par la rotation de centre O et d'angle 90° dans le sens direct (c'est à dire inverse des aiguilles d'une montre).
Construire ensuite les images des quatre courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_h$, $\mathscr{C}'_f$ et $\mathscr{C}'_h$ par la symétrie de centre O.

Exercice 2 **8 points**

Toutes les mesures de longueur sont en cm et celles de volume en cm^3.

On considère la figure ci-contre, dans laquelle :

— ABCDEFGH est un cube d'arête 6.

— On a placé :

— A′ sur [AB] tel que $AA' = x$;

— B′ sur [BC]tel que $BB' = x$;

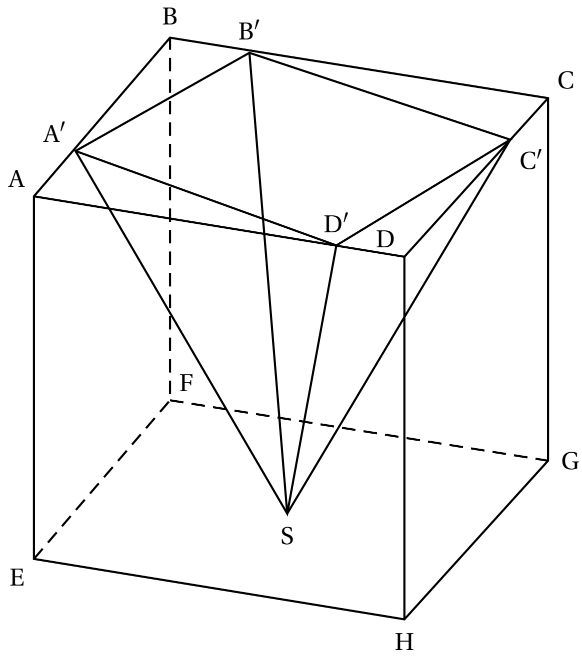
— C′ sur [CD] tel que $CC' = x$;

— D′ sur[DA] tel que $DD' = x$,

où x est un nombre réel de l'intervalle [0 ; 6]

(On sait alors que A′B′C′D′ est un carré)

— On note S le centre du carré EFGH



1. Montrer que le volume noté $V(x)$ de la pyramide SA′B′C′D′ est $V(x) = 4\left(x^2 - 6x + 18\right)$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est égal à $\dfrac{1}{3}b \times h$ où b désigne l'aire de sa base et h la mesure de sa hauteur.

2. On prend maintenant $x = 2$.

a. Calculer alors les mesures, arrondies au centième, des arêtes de la pyramide.

b. Calculer ensuite la mesure en degré, arrondie au centième, de l'angle $\widehat{A'SC'}$.