Brevet de technicien supérieur
Groupement D session 2005

Exercice 1 **12 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un certain type de comprimés dont la masse est exprimée en milligrammes.

Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Un comprimé de ce type est considéré comme acceptable pour la masse lorsque celle-ci appartient à l'intervalle $[580\,;\,620]$.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque comprimé prélevé au hasard dans la production, associe sa masse.
On suppose que X suit la loi normale de moyenne 600 et d'écart type 9.

1. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard dans la. production soit acceptable pour la masse.
2. Déterminer le nombre réel positif α tel que : $P(600-\alpha \leqslant X \leqslant 600+\alpha) = 0,90$.

B. Loi binomiale et approximation d'une loi binomiale

On admet que 3 % des comprimés d'un lot important ne sont pas acceptables pour la masse. On prélève au hasard N comprimés de ce lot pour vérification de la masse. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de N comprimés.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de N comprimés, associe le nombre de comprimés non acceptables pour la masse.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Dans cette question, on prend $N = 10$.
   a. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé exactement, ne soit pas acceptable pour la masse.
   b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 10 comprimés, un comprimé au moins, ne soit pas acceptable pour la masse.
3. Dans cette question, on prend $N = 50$.
   a. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.
   b. On désigne par Z_1 une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ, où λ a la valeur obtenue au **a.**. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 50 comprimés, au plus 2 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse.
4. Dans cette question, on prend $N = 1\,000$. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $5,39$. On note Z_2 une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 30 et d'écart type $5,39$.
   a. Justifier les paramètres de cette loi normale.

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement de 1 000 comprimés, au plus 25 comprimés ne soient pas acceptables pour la masse, c'est à dire calculer $P(Z_2 \leqslant 25,5)$.

C Intervalle de confiance

Dans cette partie, on s'intéresse à la masse d'un stock important de comprimés. On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 comprimés dans le stock. Soit $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 comprimés prélevés au hasard et avec remise dans le stock, associe la moyenne des masses des comprimés de cet échantillon.

On suppose que $\overline{M}$ suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$ avec $\sigma = 9$.

Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est 502. Déterminer un intervalle de confiance centré sur de la moyenne inconnue μ des masses des comprimés du stock considéré, avec le coefficient de confiance 95 %.

Exercice 2 **8 points**

On décide de mesurer en fonction du temps la quantité de principe actif d'un médicament présent dans le sang d'un groupe de patients en traitement dans un hôpital. À l'instant t, exprimé en minutes, on note $q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes de ce principe actif, contenue dans le sang d'un patient.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle

$$(\text{E}) : \quad 4y' + y = -0,002t + 2,992$$

où y est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0 ; 1\,440]$ et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(\text{E}_0) \quad 4y' + y = 0$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $[0 ; 1\,440]$ par $g(t) = at + b$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution q de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $q(0) = 0$.

B. Étude d'une fonction et calcul intégral

On admet dans cette partie que, pour tout t de $[0 ; 1\,440]$,

$$q(t) = 3 - 0,002t - 3\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}.$$

On rappelle que le temps t est exprimé en minutes.

1. **a.** Calculer $q'(t)$ pour tout t de $[0 ; 1\,440]$.
   b. Résoudre dans $[0 ; 1\,440]$ l'inéquation $q'(t) \geqslant 0$.
   c. En déduire le sens de variation de q sur $[0 ; 1\,440]$.
   La fonction q admet un maximum pour $t = t_0$. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de t_0 et $q(t_0)$.
2. Calculer la quantité de principe actif restant dans le sang d'un patient 24 heures après l'injection du médicament. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

3. Démontrer que la valeur moyenne V_m de la fonction q sur $[0\,;\,1\,440]$ est :

$$V_m = \frac{1}{1\,440}\left(2\,234{,}4 + 12\mathrm{e}^{-360}\right).$$