BTS : Groupement D session 2003

EXERCICE 1 **11 points**

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 4y' + y = 1200\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la constante réelle a telle que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 4y' + y = 0$ et en déduire les solutions de (E).
3. Déterminer la fonction h solution de (E) qui vérifie $h(6) = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[6 ; +\infty[$ par $f(x) = 300(x-6)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = 75(10-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[6 ; +\infty[$ et donner son tableau de variations.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. (unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses ; 1 mm sur l'axe des ordonnées)

Partie C

Une société veut vendre des machines destinées à certaines entreprises. Le prix de vente minimal est fixé à 10 000 euros. Le nombre prévisible, y, de machines vendues, est fonction du prix proposé, en milliers d'euros, x. Une enquête auprès de clients potentiels a donné les résultats suivants :

x_i : Prix proposé pour une machine en milliers d'euros	10	12,5	15	17,5	20	25
y_i : Nombre prévisible de machines vendues au prix proposé	100	85	62	42	28	11

1. **a.** Représenter les six points du nuage sur le graphique de la question B4.

   b. On pose $z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{x_i - 6}\right)$. Donner les valeurs de z_i arrondies au millième le plus proche.

   c. Donner une équation de la droite de régression de z en x ; les coefficients seront arrondis au millième le plus proche.

   d. En déduire une expression approchée de y de la forme $y = \alpha(x-6)\mathrm{e}^{\beta x}$.

2. On admet dans cette question que le chiffre d'affaires est $g(x) = xf(x)$ pour $x \geqslant 10$, où x est le prix proposé en milliers d'euros et f la fonction définie dans la partie B.

   En étudiant les variations de la fonction g déterminer pour quel prix le chiffre d'affaires est maximal et donner la valeur du maximum.

Exercice 2 **9 points**

Deux machines M_A et M_B produisent, en grande série, des objets de masse théorique 180 grammes.

Partie 1

On note X_A (respectivement X_B) la variable aléatoire qui, à un objet pris au hasard dans la production de la machine M_A (respectivement M_B) associe sa masse en grammes. On sait que X_A (respectivement X_B) suit une loi normale de moyenne m_A (respectivement m_B) et d'écart type σ_A (respectivement σ_B). Un objet est conforme si sa masse est comprise entre 178 g et 182 g.

1. On donne $m_A = 179,8$ et $\sigma_A = 1$. Calculer la probabilité qu'un objet pris au hasard dans la production de la machine M_A soit conforme.
2. On donne $m_B = 180$ et on sait que 98 % des objets fabriqués par la machine M_B sont conformes. Calculer l'écart type σ_B (résultat arrondi au centième).

Partie 2

Dans la production totale, 40 % des objets proviennent de la machine M_A et 60 % de la machine M_B. La machine M_A produit 5 % d'objets non conformes et la machine M_B en produit 2 %.

1. On prélève au hasard un objet dans la production. Calculer la probabilité que cet objet soit conforme.
2. On prélève au hasard un objet dans la production et on constate qu'il est conforme. Quelle est alors la probabilité (arrondie au millième) que cet objet provienne de la machine M_A ?

Partie 3

On admet que 96,8 % des objets de la production sont conformes. Les objets sont stockés par boîtes de vingt. On désigne par Y la variable aléatoire qui associe à une boîte prise au hasard le nombre d'objets conformes de cette boîte.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par Y.
2. On choisit une boîte au hasard dans la production. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - tous les objets sont conformes ;
   - au moins dix-huit objets sont conformes.

Partie 4

On admet que la variable aléatoire $\overline{X}$ qui associe à un échantillon de taille 100 sa masse moyenne en grammes suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 0,092.

La valeur exacte de la masse moyenne m des objets étant inconnue, on prélève au hasard un échantillon de 100 objets dont la masse moyenne est 179,93 g. Déterminer un intervalle de confiance, au seuil de risque 10 %, de la valeur de m.