∽ Brevet de technicien supérieur session 2001 ∾ Groupement D

Exercice 1 **12 points**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant t) sont respectivement notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$. Le temps t est exprimé en seconde et les températures en °C.

Partie A

Les températures $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ vérifient les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} (1)\ \alpha'(t) & = & -0,011(\alpha(t)-\beta(t)) \\ (2)\ \beta'(t) & = & 0,021(\alpha(t)-\beta(t)) \end{array}\right. \text{ avec } \left\{\begin{array}{lcl} \alpha(0) & = & 40 \\ \beta(0) & = & 10 \end{array}\right.$$

1. On pose $f(t) = \alpha(t) - \beta(t)$.

a. Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 0,032y = 0$.

b. Résoudre l'équation précédente.

c. Calculer $f(0)$ et montrer que $f(t) = 30\text{e}^{-0,032t}$.

2. Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$.

a. Exprimer $F(t)$ en fonction de t.

b. À l'aide de la condition (2) justifier que $\beta(t) = K + 0,021F(t)$ où K est une constante.

c. Déterminer K et donner une expression de $\beta(t)$ en fonction de t.

Partie B

Pour tout t dans $[0\,;\ +\infty[$ on pose

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(t) = \dfrac{5}{16}\left(95 + 33\text{e}^{\frac{-4t}{125}}\right) \\ \beta(t) = \dfrac{5}{16}\left(95 - 63\text{e}^{\frac{-4t}{125}}\right) \end{array}\right.$$

1. Déterminer la limite de α ainsi que celle de β en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces deux fonctions ?

2. Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions α et β.

3. Construire les courbes représentatives des fonctions α et β dans un repère orthogonal (sur papier millimétré ; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisses et 2 cm pour 5° C en ordonnée ; on fera varier t entre 0 et 120 secondes).

4. À partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à 1° C ?

Exercice 2 **8 points**

Un magicien prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.
On appelle p la probabilité que le magicien donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.
Si le magicien est un imposteur on a $p = \frac{1}{2}$, sinon $p > \frac{1}{2}$.
On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

Partie A

On suppose $p = \frac{1}{2}$ et on note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe le nombre de succès du magicien.
(On arrondira les probabilités au dix millième le plus proche.)

1. Dans cette question on prend $n = 20$.

  a. Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.

  b. Calculer la probabilité $P(Y = 15)$.

2. Dans cette question on prend $n = 100$. On admet que la variable aléatoire Y peut être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.

  a. Préciser les paramètres de cette loi normale.

  b. Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y > 60)$.

Partie B

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence des succès obtenus par le magicien au cours des n tirages d'une carte. On admet que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

— On construit un test unilatéral permettant de détecter, au risque de 5 %, si le magicien est un imposteur.

— On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = \frac{1}{2}$, et comme hypothèse alternative $H_1 : p > \frac{1}{2}$.

1. Calculer, sous l'hypothèse H_0, le réel positif h tel que $P\left(F \leqslant \frac{1}{2} + h\right) = 0,95$.

2. Énoncer la règle de décision du test.

3. Sur un échantillon de taille 100, le magicien a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque de 5 %, que le magicien est un imposteur ?