Sujet BTS Groupement C Métropole 2010
Corrigé

Exercice 1 : **12 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. (a) l'équation caractéristique de l'équation différentielle $2y'' + y' - y = 0$ est $2r^2 + r - 1 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 = 3^2$
L'équation caractéristique admet 2 solutions réelles.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2\times 2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2\times 2} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{La solution générale de l'équation différentielle } 2y'' + y' - y = 0 \text{ est } y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

(b) On pose $g(x) = ax + b$ donc $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$
g est solution de l'équation différentielle (E) : $2y'' + y' - y = -x + 2$ si :

$$\begin{aligned} 2g''(x) + g'(x) - g(x) &= -x+2 \\ 2\times 0 + a - (ax+b) &= -x+2 \\ -ax + a - b &= -x + 2 \end{aligned}$$

On identifie les coefficients : $\left\{\begin{array}{rcl} -a &=& -1 \\ a-b &=& 2 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ a-2 &=& b \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& -1 \end{array}\right.$ $\boxed{\text{Donc } g(x) = x - 1}$

(c) $\boxed{\text{Les solution de l'équation (E) sont les fonctions } f \text{ de la forme } f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-x} + \mu \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x - 1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

2. $f(0) = \lambda \mathrm{e}^0 + \mu \mathrm{e}^0 - 1$ donc $0 = \lambda + \mu - 1$ donc $\lambda + \mu = 1$
$f'(x) = -\lambda \mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\mu \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + 1$. $f'(0) = -\lambda \mathrm{e}^0 + \frac{1}{2}\mu \mathrm{e}^0 + 1$ or $f'(0) = 0$ donc $-\lambda + \frac{1}{2}\mu = -1$
On obtient le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 1 \\ -\lambda + \frac{1}{2}\mu &=& -1 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 1 \\ \frac{3}{2}\mu &=& 0\ (L_1 + L_2) \end{array}\right.$ d'ou $\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& 1 \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Donc } f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1}$

Partie B

1. (a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x - 1$
donc $\boxed{f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 1}$

$$\begin{array}{rcl} -e^{-x} + 1 &\geqslant& 0 \\ 1 &\geqslant& \mathrm{e}^{-x} \\ \ln(1) &\geqslant& \ln\left(\mathrm{e}^{-x}\right) \\ 0 &\geqslant& -x \\ 0 &\leqslant& x \end{array}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$

(b) $\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to+\infty} -x &=& -\infty \\ \lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t &=& 0 \end{array}\right\}$ Donc $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

(c)

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	0 $-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

2. (a) $f(x) - (x+1) = \mathrm{e}^{-x} + \cancel{x+1} - \cancel{(x+1)} = \mathrm{e}^{-x}$ or d'après la question **??**, $\lim_{x\to+\infty} - \mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$.
   La droite d'équation $y = x+1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

   (b) Pour tout $x \geqslant 0$ $f(x) - (x+1) = \mathrm{e}^{-x} > 0$. Donc la courbe $\mathscr{C}$ est toujours située au-dessus de la droite $\mathscr{D}$

3. voir annexe

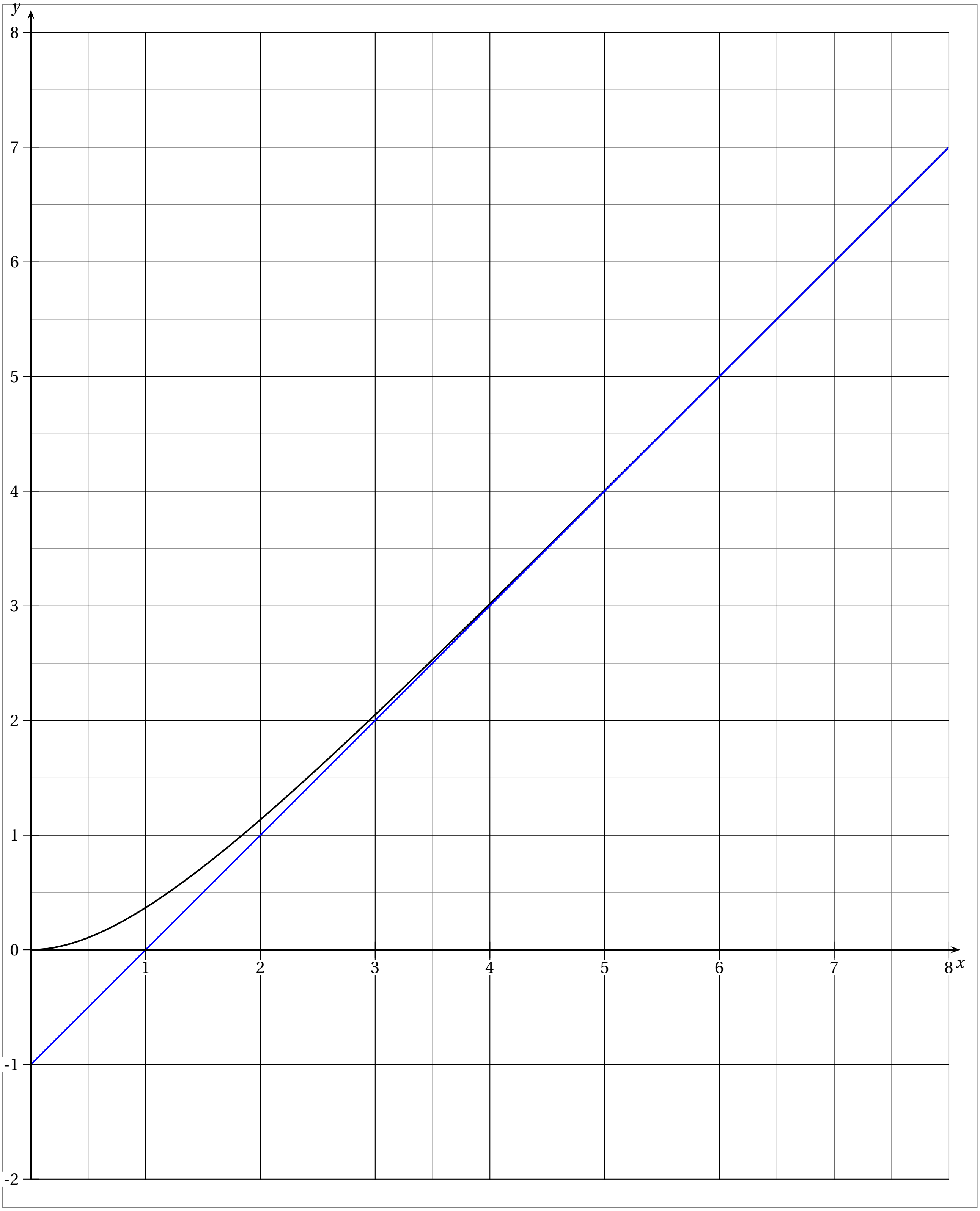
4. $$\begin{aligned}\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^2\\ &= -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{0}\\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2}\end{aligned} \qquad \boxed{\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-2}.}$$

   L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ la droite $\mathscr{D}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x) - (x-1)\ \mathrm{d}x$ u.a $= \displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x$ u. a

   or 1 u.a $= 2\times2$ cm^2 donc $\boxed{\mathscr{A} = 4 - 4e^{-2}\mathrm{cm}^2 \approx 3{,}46\mathrm{cm}^2}$

Annexe



Exercice 2 : **8 points**

Partie A

1.

$$\begin{aligned}
p(59{,}5 \leqslant X \leqslant 61{,}1) &= p\left(\frac{59{,}5-60{,}3}{0{,}4} \leqslant \frac{X-60{,}3}{0{,}4} \leqslant \frac{61{,}1-60{,}3}{0{,}4}\right)\\
&= p\left(-2 \leqslant \frac{X-60{,}3}{0{,}4} \leqslant 2\right)\\
&= 2p\left(\frac{X-60{,}3}{0{,}4} \leqslant 2\right)-1\\
&= 2\times 0{,}9772-1 = 0{,}9544 \text{ car la variable aléatoire } \frac{X-60{,}3}{0{,}4} \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

$\boxed{p(59{,}5 \leqslant X \leqslant 61{,}1) = 0{,}9544}$

2.

$$\begin{aligned}
p(59{,}5 \leqslant X \leqslant 61{,}1) &= 0{,}99\\
p\left(\frac{59{,}5-60{,}3}{\sigma} \leqslant \frac{X-60{,}3}{\sigma} \leqslant 61{,}1-60{,}3\sigma\right) &= 0{,}99\\
p\left(\frac{0{,}8}{\sigma} \leqslant \frac{X-60{,}3}{\sigma} \leqslant \frac{0{,}8}{\sigma}\right) &= 0{,}99\\
2\times p\left(\frac{X-60{,}3}{\sigma} \leqslant \frac{0{,}8}{\sigma}\right)-1 &= 0{,}99\\
p\left(\frac{X-60{,}3}{\sigma} \leqslant \frac{0{,}8}{\sigma}\right) & \frac{0{,}99+1}{2} = 0{,}995
\end{aligned}$$

Comme la variable aléatoire $\frac{X-60{,}3}{0{,}4}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ on en déduite que $\frac{0{,}8}{\sigma} = 2{,}575$ donc $\boxed{\sigma = \frac{0{,}8}{2{,}575} \approx 0{,}31}$

Partie B

1. On choisit une pièce dans la production, il y a 2 issues :
   - on appelle succès l'évènement : « la pièce est non conforme », $p = 0{,}05$
   - on appelle échec l'évènement : « la pièce est conforme », $p = 0{,}95$

   On répète 80 fois l'expérience de manière indépendante. (on assimile le tirage à un tirage avec remise)
   Donc la variable aléatoire Y comptabilisant le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètre $n = 80$ et $p = 0{,}05$

2. $p(Y=3) = C_80^3 \times 0{,}05^3 \times 0{,}95^77 = 0{,}20$ $\boxed{p(Y=3) = 0{,}20}$

3. (a) le paramètre λ de la loi de poisson est $\lambda = n \times p = 80 \times 0{,}05$ $\boxed{\lambda = 4}$

   (b) Soit Z la variable aléatoire suivant la loi de poisson de paramètre $\lambda = 4$.

   $p(Z \leqslant 3) = p(Z=0)+p(Z=1)+p(Z=2)+p(Z=3) = 0{,}018+0{,}073+0{,}147+0{,}195 = 0{,}433$ $\boxed{p(Z \leqslant 3) = 0{,}43}$