Sujet BTS Groupement C Métropole 2009
Corrigé

Exercice 1 : **10 points**

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. Soit g une solution constante de (E) : $y'' + 2y' + y = 3$.
   On pose $g(x) = c$, où $c \in \mathbb{R}$ et donc $g'(x) = 0$ et $g''(x) = 0$

   Si g est solution de (E) on a : $g(x)'' + 2g'(x)' + g(x) = 3$ donc $\boxed{g(x) = c = 3}$

2.
   - On résout l'équation (E_0) $y'' + 2y' + y = 0$
     l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ soit $(r+1)^2 = 0$. donc l'équation caractéristique admet une racine double $r = -1$ donc la solution générale de l'équation (E_0) est $y_0 = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x}$ ou $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$
   - On résout l'équation (E)

     La solution générale de l'équation (E) est $\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} + 3}$

3. Graphiquement on constate que $f(0) = 5$ et qu'au point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale donc $f'(0) = 0$
   On pose $f(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} + 3$.

$$\begin{aligned} f(0) &= (\lambda \times 0 + \mu)\mathrm{e}^{-0} + 3 \\ 5 &= \mu + 3 \end{aligned}$$

donc $\mu = 2$ et $f(x) = (\lambda x + 2)\mathrm{e}^{-x} + 3$.

$\boxed{\text{Donc on a } f(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{-x} + 3}$

On calcule $f'(x)$
$u(x) = (\lambda x + 2)$ $\quad u'(x) = \lambda$
$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ $\quad f'(x) = \lambda\mathrm{e}^{-x} + (\lambda x + 2)(-\mathrm{e}^{-x})$
donc $f'(0) = \lambda\mathrm{e}^0 - (\lambda \times 0 + 2)\mathrm{e}^0$ donc $0 = \lambda - 2$ donc $\lambda = 2$

Partie B : Étude statistique

1.

x	2,3	1,4	$-0,6$	2,9	$-0,3$	$-0,8$	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$z = (y-3)\mathrm{e}^x$	8,0	5,7	-0,8	9,1	0,6	-0,8	4,0	2,1

2. Les points semblent alignés, un ajustement affine semble approprié.

3. À la calculatrice on obtient : $\boxed{r = 1{,}00 \text{ et } z = 2{,}80x + 1{,}46}$

4. D'après la question précédente on peut approcher le nuage des points $M(x_i,\ z_i)$ par une droite car le coefficient de corrélation r est très proche de 1.
   On a $z = (y-3)\mathrm{e}^{2,80x+1,46}$ donc $y - 3 = (2{,}80x + 1{,}46)\mathrm{e}^{-x}$donc $y = (2{,}80x + 1{,}46)\mathrm{e}^{-x} + 3$. On retrouve donc une fonction du type $(\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-x} + 3$.
   Donc le nuage de points peut être ajusté par une courbe représentant une fonction solution de l'équation (E), cette fonction est $f(x) = (2{,}80x + 1{,}46)\mathrm{e}^{-x} + 3$

Exercice 2 : **10 points**

Partie A

On a $\lambda = n \times p$ donc $\lambda = 60 \times 0,05 = 3$

On approche Y par une variable aléatoire Z qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$.

$$\begin{aligned} p(Z \geqslant 6) &= 1 - p(Z < 6) \\ &= 1 - (P(Z=0) + p(Z=1) + p(Z=2) + p(Z=3) + p(Z=4) + p(Z=5)) \\ &= 1 - (0,0498 + 0,1494 + 0,224 + 0,224 + 0,168 + 0,1008) \\ &= 0,084 \end{aligned}$$

$p(Z \geqslant 6) = 0,08$

Partie B

1. $\bar{d} = \dfrac{1 \times 13 + 2,5 \times 16 + \ldots + 10 \times 5}{100} = \dfrac{4335}{100}$ $\boxed{\bar{d} = 4,34}$
2. L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 4$.
   (a) l'hypothèse alternative $H_1 : \mu > 4$.
   (b) Sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire $\overline{D}$ suit la loi normale de moyenne 4 et d'écart-type 0,24.

$$\begin{aligned} P(\overline{D} \leqslant 4 + h) &= 0,95 \\ P\left(\frac{\overline{D} - 4}{0,24} \leqslant \frac{\cancel{4} + h - \cancel{4}}{0,24}\right) &= 0,95 \\ P\left(\frac{\overline{D} - 4}{0,24} \leqslant \frac{+h}{0,24}\right) &= 0,95 \end{aligned}$$

   La variable aléatoire $\dfrac{\overline{D} - 4}{0,24}$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ on en déduit d'après la table que $\dfrac{h}{0,24} = 1,645$

   donc $h = 1,645 \times 0,24 = 0,3948$ $\boxed{h = 0,39}$

   (c) $4 + h = 4,39$
   - si si $\bar{d} \leqslant 4,38$ (soit 4h 22 min et 48s) alors au risque de 5% le temps d'attente moyen n'est pas supérieur à 4h.
   - si $\bar{d} > 4,38$ alors au risque de 5% le temps d'attente moyen est supérieur à 4h.

   (d) D'après l'échantillon étudié, $\bar{d} = 4,34 \leqslant 4,39$ donc au seuil de 5 % on peut conclure que la moyenne des temps d'attente n'est pas supérieure à 4 minutes

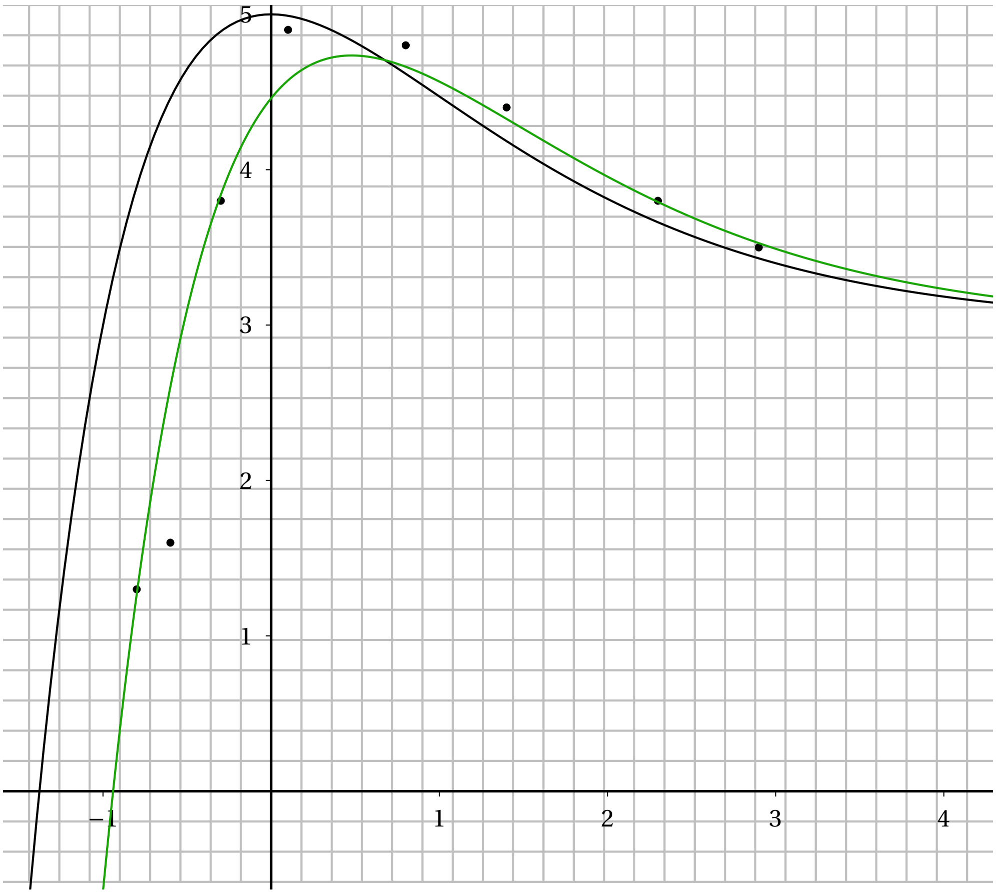
Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous sont représentées :

— Une courbe $\mathscr{C}$, utilisée dans la partie A de l'exercice 1.

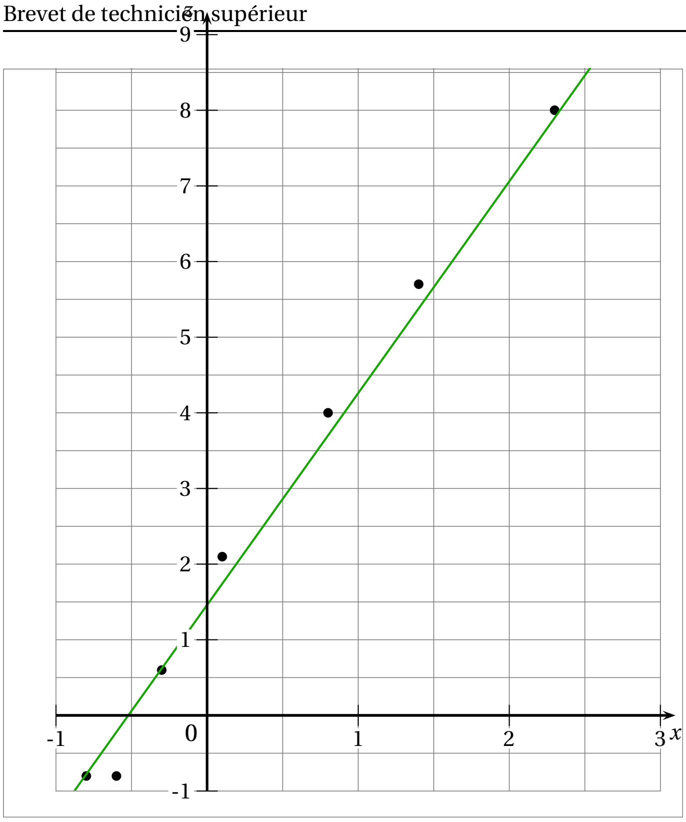
— Un nuage de points utilisés dans la partie B de l'exercice 1.
(Les coordonnées des points de ce nuage sont données dans le tableau figurant sous le graphique).



Partie C

1) Coordonnées du nuage de points

x	2,3	1,4	−0,6	2,9	−0,3	−0,8	0,8	0,1
y	3,8	4,4	1,6	3,5	3,8	1,3	4,8	4,9
$z=(y-3)\mathrm{e}^x$	8,0	5,7	-0,8	9,1	0,6	-0,8	4,0	2,1



z
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
1
2
3
x