Brevet de technicien supérieur
Groupement C session 2004

Exercice 1 **11 points**

Une entreprise spécialisée produit des boules de forme sphérique en grande série. Le responsable de la qualité cherche à analyser la production. Il mesure pour cela le diamètre des boules d'un échantillon (E) de 50 pièces, et obtient les résultats suivants :

Diamètre en mm	72,6	72,7	72,8	72,9	73	73,1	73,2	73,3	73,4
Nombre de boules	3	5	7	8	10	9	4	3	1

Une boule est dite conforme si son diamètre d mesuré en millimètres, vérifie :
$72,7 \leqslant d \leqslant 73,3$.

1. **a.** Quel est, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules non conformes ?

   b. Déterminer la moyenne et l'écart type de cet échantillon. Les résultats seront arrondis au centième.

2. On admet dans cette question que la probabilité qu'une boule ne soit pas conforme est $p = 0,12$.

   L'entreprise livre des lots de 50 boules à des clients. On assimile le choix de chaque boule d'un lot à un tirage au hasard et avec remise. On désigne par X la variable aléatoire mesurant le nombre de boules non conformes d'un lot.

   a. Préciser et justifier la loi de probabilité suivie par X.

   b. On approche la loi de probabilité de X par une loi de Poisson.

   i. Quel est le paramètre de cette loi ?

   ii. Déterminer la probabilité qu'il y ait plus de cinq boules non conformes dans un lot. La réponse sera arrondie au centième.

3. L'étude statistique de la production permet d'admettre que la variable aléatoire D, qui mesure le diamètre d'une boule, soit une loi normale de paramètres m et σ. Les résultats seront arrondis au millième. On choisit au hasard une boule produite.

   a. On suppose que $m = 73$ et $\sigma = 0,2$. Calculer la probabilité que la boule soit conforme, c'est-à-dire $p(72,7 \leqslant D < 73,3)$.

   b. Sachant que $m = 73$, quelle valeur devrait prendre σ pour que la probabilité d'obtenir une boule non conforme soit $0,1$?

4. La moyenne obtenue sur l'échantillon (E) amène à se poser la question : « Le diamètre moyen m des boules fabriquées est-il strictement inférieur à 73 mm ? »

   Pour cela, on construit un test d'hypothèse au risque de 5 %.

   L'hypothèse nulle H_0 est : $m = 73$;

   L'hypothèse alternative H_1 est : $m < 73$.

   On admet que la variable aléatoire $\overline{D}$, qui mesure le diamètre moyen sur un échantillon de 50 boules prélevées au hasard et avec remise, suit une loi normale de moyenne 73 et d'écart type $\dfrac{0,2}{\sqrt{50}}$.

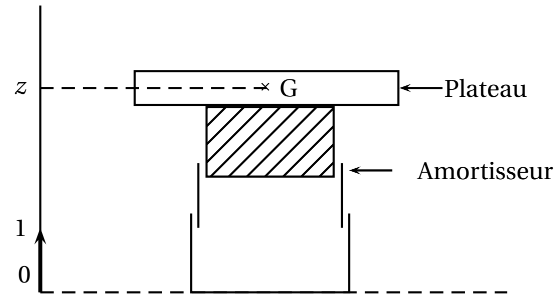
   a. Calculer le nombre réel a tel que $p(\overline{D} \geqslant 73 - a) = 0,95$.

   b. Énoncer la règle de décision du test.

c. Au risque de 5 % et au vu de l'échantillon (E), que peut-on conclure ?

Exercice 2 **9 points**

On considère un système mécanique formé d'un plateau soutenu par un amortisseur. Il est représenté sur le schéma ci-contre. On note z la cote du centre de gravité du plateau. On suppose que z est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur un intervalle de $\mathbb{R}$ où t représente le temps exprimé en seconde.



L'étude de ce système mécanique permet de considérer que la fonction z est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 5z'' + 6z' + z = 2.$$

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $5z'' + 6z' + z = 0$.
2. Chercher une solution particulière constante de l'équation (E) et en déduire la solution générale de (E).
3. Donner la solution g de (E) qui vérifie les conditions $g(0) = 5$ et $g'(0) = 1$.

Partie B

On suppose pour la suite du problème que $z(t) = f(t)$, où f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t} + 2.$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer la limite de $f(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
3. Déduire des deux questions précédentes l'évolution de la cote du point G en fonction du temps t.
4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Justifier l'existence d'une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ quand t tend vers $+\infty$; en donner une équation.
   Tracer cette asymptote sur le graphique de la feuille jointe en annexe.

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h, définie pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$h(t) = 0,5\mathrm{e}^{-t} + 2,5\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int_1^5 \left[f(t) - 2\right]\,\mathrm{d}t$.

   b. Interpréter géométriquement ce résultat sur la feuille jointe en annexe.

ANNEXE
(à rendre avec la copie)