∽ Brevet de technicien supérieur ∾ Groupement B - session 2002

Exercice 1 **8 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans un groupe d'assurances, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.
Dans cet exercice, sauf mention contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.

1. Étude du nombre de sinistres par véhicule

Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte, associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée. On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre $0,28$.

a. Calculer la probabilité de l'évènement A : « un véhicule tiré au hasard dans le parc n'a aucun sinistre pendant l'année considérée ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement B : « un véhicule tiré au hasard dans le parc a, au plus, deux sinistres pendant l'année considérée ».

2. Étude du nombre de sinistres dans une équipe de 15 conducteurs.

On note E l'évènement : « un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée ». On suppose que la probabilité de l'évènement E est 0,6.

On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise. Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 15 conducteurs.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

a. Justifier que la variable aléatoire Y suite une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

b. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistre pendant l'année considérée.

3. Étude du coût des sinistres

Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de cette catégorie, associe son coût en euros. On suppose que C suit la loi normale de moyenne 1 200 et d'écart type 200.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type coûte entre 1 000 euros et 1 500 euros.

4. On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise. On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistre.

a. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.

b. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard et avec remise dans ce parc, associe le pourcentage de véhicules qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
On suppose que F suit la loi normale

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$$

où p est le pourcentage inconnu de véhicules du parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95 %.

c. On considère l'affirmation suivante :
« le pourcentage p est obligatoirement dans l'intervalle de confiance obtenu à la question b. »
Est-elle vraie ? On ne demande pas de justification.

Exercice 2 **12 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' - y' - 2y = (-6x-4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' sa fonction dérivée première et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y'' - y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^{-x}$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales :

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = 1$$

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

Sa courbe représentative C dans un repère orthonormal est donnée sur la figure ci-après.

1. **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   c. Interpréter graphiquement le résultat obtenu au b..

2. **a.** Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** À l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \to \mathrm{e}^t$, donner le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction x$\to \mathrm{e}^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c. En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et T au voisinage de ce point.

Partie C : Calcul intégral

1. **a.** La fonction f définie dans la partie B étant une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = (-6x - 4)\,\mathrm{e}^{-x}$$

montrer que f vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[f''(x) - f'(x) + (6x + 4)\mathrm{e}^{-x}\right]$$

b. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) - f(x) - (6x + 10)\mathrm{e}^{-x}\right]$$

Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$F'(x) = f(x)$$

c. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \left(-x^2 - 4x - 5\right)\mathrm{e}^{-x}$$

2. Utiliser ce qui précède pour démontrer que l'aire A de la partie du plan hachurée sur la figure est, en unités d'aire,

$$A = 2\mathrm{e} - 5.$$