

Brevet de technicien supérieur session 2006
Groupement A Nouvelle-Calédonie

A. P. M. E. P.

Exercice 1

8 points

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique, et telle que :

$$\begin{cases} \varphi(t) = t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \varphi(t) = 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

On note $S(t)$ le développement de Fourier associé à la fonction φ ; les coefficients de Fourier associés à la fonction φ sont notés a_0, a_n, b_n où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Représenter graphiquement la fonction φ sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.
2.
 - a. Calculer a_0 , la valeur moyenne de la fonction φ sur une période.
 - b. On rappelle que pour une fonction f , périodique de période T le carré de la valeur efficace sur une période est donné par : $\mu_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt$.
Montrer que μ_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction sur une période est égal à $\frac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a : $a_n = \frac{1}{\pi n^2} [\cos(n\pi) - 1]$.
On admet que, pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a : $b_n = -\frac{\cos(n\pi)}{n}$.
4. On considère la fonction S_3 définie sur \mathbb{R} par :

$$S_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^3 [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

où les nombres a_0, a_n, b_n sont les coefficients de Fourier associés à la fonction φ définie précédemment.

- a. Recopier et compléter le tableau avec les valeurs exactes des coefficients demandés.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
					$-\frac{2}{9\pi}$	$\frac{1}{3}$

- b. Calculer la valeur exacte de $S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ puis donner la valeur approchée de $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - S_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ arrondie à 10^{-2} .
5. On rappelle la formule de Parseval permettant de calculer le carré de la valeur efficace μ_3^2 de la fonction S_3 .

$$\mu_3^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} [a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2]$$

- a. Calculer la valeur exacte de μ_3^2 .
- b. Calculer la valeur approchée de $\frac{\mu_3^2}{\mu_{\text{eff}}^2}$ arrondie à 10^{-2} .

Exercice 2**12 points**

Dans ce problème, on s'intéresse à un filtre modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} s'(t) + s(t) = e(t) \\ s(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction e représente l'entrée aux bornes du filtre et la fonction s la sortie.

On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace respectivement notées E et S . La fonction de transfert H du filtre est définie par :

$$S(p) = H(p) \times E(p).$$

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U , est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Partie A

1. Montrer que : $H(p) = \frac{1}{p+1}$.
2. La fonction e est définie par : $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$.
 - a. Représenter graphiquement la fonction e .
 - b. Montrer que : $E(p) = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p})$.
 - c. En déduire $S(p)$.
 - d. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$$

- e. En déduire l'original s de S .
- f. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + e^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s(t) = 1 + (1-e)e^{-t} & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$

3. a. Comparer $s(1^-)$ et $s(1^+)$.
- b. Calculer $s'(t)$ et étudier son signe sur les intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.
- c. En déduire le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- d. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.

Partie B

On note j le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On prend $p = j\omega$ où ω désigne un nombre réel positif. On a alors : $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$.

On munit le plan d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 10 cm.

1. Montrer que l'ensemble (Δ) des points m d'affixe $z = 1 + j\omega$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$ est une demi-droite que l'on caractérisera.
2. Quel est l'ensemble (\mathcal{C}) des points M d'affixe $Z = \frac{1}{1+j\omega}$ lorsque ω décrit l'intervalle $]0; +\infty[$?
3. Représenter, dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) les ensembles (Δ) et (\mathcal{C}) .