Brevet de technicien supérieur
Nouvelle–Calédonie novembre 2007 - groupement A

Exercice 1 **9 points**

On considère la fonction numérique paire, 2π-périodique, définie sur l'intervalle $[0~;~\pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lclll} f(t) & = & \cos(t) & \text{si} & 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2}\\ f(t) & = & 0 & \text{si} & \dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi\end{array}\right.$$

On a tracé en pointillé sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi~;~3\pi]$.

1. Représenter. sur le document réponse à rendre avec la copie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi~;~3\pi]$.

2. On admet que la fonction f satisfait aux conditions d'application du théorème de Dirichlet et, par conséquent qu'elle est décomposable en série de Fourier.

On note :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n \geqslant 1} \left[a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\right]$$

la série de Fourier associée à la fonction f.

a. Donner la valeur de b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

b. Calculer a_0.

c. Calculer a_1.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{n-1} + \frac{\sin\left[(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{n+1}\right)$$

3. On note $S_1(t)$ la série de Fourier associée à la fonction f tronquée au rang 1.

On a donc : $S_1(t) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\cos t$.

À partir de la courbe représentative de la fonction cosinus tracer sur le document réponse la courbe représentant la fonction S_1 sur l'intervalle $[-\pi~;~3\pi]$.

On laissera figurer les tracés intermédiaires.

Exercice 2 **11 points**

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels telle que :

$$\left\{\begin{array}{rcll} f''(t) + \dfrac{6}{5}f'(t) + f(t) & = & 1 & \text{pour tout nombre réel } t\\ f(0) & = & 0 & \\ f'(0) & = & 0 & \end{array}\right.$$

1. Dans cette question on détermine une expression de $f(t)$.

a. Résoudre l'équation différentielle (E)

$$y''(t)+\frac{6}{5}y'(t)+y(t)=0 \quad \text{(E)}$$

dans laquelle y désigne une fonction de la variable réelle t.

b. En déduire que la fonction f est définie pour tout nombre réel t par :

$$f(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\left[\cos\left(\frac{4}{5}t\right)+\frac{3}{4}\sin\left(\frac{4}{5}t\right)\right].$$

2. Dans cette question on détermine la limite de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

a. Justifier que, pour tout nombre réel t, on a :

$$-\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right)\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}$$

b. En déduire que

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}t}\cos\left(\frac{4}{5}t\right)=0$$

c. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. a. Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel t.

b. Montrer que : $f'(t)=0$ équivaut à $t=\dfrac{5k\pi}{4}$, où k désigne un nombre entier relatif.

c. On note pour tout nombre entier relatif k, $t_k=\dfrac{5k\pi}{4}$ et on pose $D_k=\left|f\left(t_k\right)-1\right|$.

Montrer que : $D_k=\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}k\pi}$.

Document-réponse à rendre avec la copie