∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾ session 2008 - groupement A2

Exercice 1 **11 points**

On considère un système analogique « entrée-sortie » dans lequel le signal d'entrée est représenté par une fonction e et celui de sortie par une fonction s.

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle surl'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

Les fonctions e et s sont des fonctions causales et on suppose qu'elles admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

On rappelle que la fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

   On suppose, dans le cadre de cette étude, que $H(p) = \dfrac{1}{1+2p}$ et $e(t) = U(t)$.

   a. Déterminer $S(p)$.

   b. Déterminer les réels α et β tels que $S(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p + \frac{1}{2}}$.

   c. En déduire $s(t)$.

2. On se propose d'approcher la fonction de transfert analogique H par la fonction de transfert numérique F telle que $F(z) = H\left(10\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = H\left(\dfrac{10z-10}{z+1}\right)$.

   L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisés respectivement par deux signaux causaux discrets x et y, admettant des transformées en Z notées respectivement X et Y.

   On se place toujours dans le cas où le signal d'entrée du système analogique est $\boldsymbol{U(t)}$.

   Le signal d'entrée du système analogique est échantillonné au pas de 0,2.

   Ainsi, le signal d'entrée x du système numérique est défini par $x(n) = U(0,2n)$ pour tout nombre entier naturel n.

   Les transformées en Z des signaux x et y vérifient $Y(z) = F(z) \times X(z)$.

   a. Montrer que $F(z) = \dfrac{z+1}{21z-19}$.

   b. Déterminer $X(z)$.

   c. Vérifier que $Y(z) = \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{20}{21}\left(\dfrac{z}{z - \frac{19}{21}}\right)$.

   En déduire l'expression $y(n)$, pour tout nombre entier naturel n.

3. Compléter, sur **l'annexe, à rendre avec la copie,** le tableau en donnant des valeurs approchées à 10^{-3} près des résultats demandés.

La méthode utilisée dans l'exercice 1, pour discrétiser le système analogique, est souvent appelée transformation bilinéaire. Dans le cadre de l'exemple étudié, nous observons que cette transformation préserve la stabilité du système et que les signaux de sortie analogique et numérique convergent vers la même limite.

Exercice 1 **11 points**

Spécialités électrotechnique et génie optique

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$\begin{cases} U(t)=0 & \text{si } t<0 \\ U(t)=1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t)=4\left[U(t)-U(t-2)\right]$$

a. Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal.

b. On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que

$$4s'(t)+s(t)=e(t) \quad \text{et} \quad s(0)=0$$

On admet que la fonction s admet une transformée de Laplace, notée S.
Démontrer que :

$$S(p)=\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}\left(1-\mathrm{e}^{-2p}\right)$$

3. Déterminer les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{4}\right)}=\frac{a}{p}+\frac{b}{p+\frac{1}{4}}$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a. Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t)=0 & \text{si } t<0 \\ s(t)=4-4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t<2 \\ s(t)=4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$$

6. a. Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2[$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{t\to 2\\ t<2}} s(t)$.

7. a. Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Exercice 3 **9 points**

Dans ce problème, on approche un signal à l'aide d'une fonction affine par morceaux.

On désigne par E un nombre réel de l'intervalle $]0~;~3[$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, **paire**, périodique de **période 5**, telle que :

$$f(t)=\begin{cases} E\times t & \text{si } 0\leqslant t<1\\ (3-E)t+2E-3 & \text{si } 1\leqslant t<2\\ 3 & \text{si } 2\leq t\leqslant \dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Partie A :
Dans cette **partie, et uniquement dans cette partie,** on se place dans le cas où $E=2$.

1. Préciser l'écriture de $f(t)$ sur chacun des intervalles $[0;1[$, $[1;2[$ et $\left[2;\frac{5}{2}\right]$.
2. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-5;10]$.

Partie B :
Dans cette **partie,** on se place dans le **cas général**, c'est-à-dire dans le cas où la valeur de E n'est pas spécifiée.
On appelle S la série de Fourier associée à la fonction f.
On note $S(t)=a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\right)$.

1. Montrer que la valeur moyenne de la fonction f sur une période est $a_0=2\dfrac{E+3}{5}$.
2. Déterminer b_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
3. **a.** Montrer que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^1 t\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{5}{2n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+\frac{25}{4n^2\pi^2}\left(\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)-1\right).$$

   b. On a calculé les intégrales $\displaystyle\int_1^2 f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t$.
   On a ainsi obtenu pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$\int_0^{\frac{5}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}t\right)\mathrm{d}t=\frac{25}{4n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

   En déduire que pour tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 :

$$a_n=\frac{5}{n^2\pi^2}\left((2E-3)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right)+(3-E)\cos\left(\frac{4n\pi}{5}\right)-E\right).$$

4. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on appelle u_n l'harmonique de rang n.
   On a alors $u_n(t)=a_n\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)+b_n\sin\left(\dfrac{2n\pi}{5}t\right)$ pour tout nombre réel t.
   a. Montrer qu'au rang 5, $u_5(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   b. On appelle E_0 la valeur de E pour laquelle l'harmonique de rang 3 est nulle, c'est-à-dire la valeur de E telle que $u_3(t)$ est nul pour tout nombre réel t.
   Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de E_0.

Dans ce problème, à l'aide d'un transformateur à diode, on approche un signal sinusoïdal redressé par une fonction affine par morceaux.
Un tel signal avec $u_3(t) = u_5(t) = 0$ *permettra :*
✓ *s'il est associé à un moteur, de réduire les à-coups du couple*
✓ *s'il est associé à un transformateur, d'éviter les pertes*
✓ *s'il est associé à un filtre, d'éliminer plus facilement les harmoniques de rang impair d'ordre supérieur.*

Annexe
à rendre avec la copie

n	$y(n)$	$t = 0,2n$	$s(t)$
0		0	
1		0,2	
5		1	
10		2	
15		3	
20		4	
25		5	
50		10	