BTS Groupement A mai 2003

EXERCICE 1 **10 points**

Le but de cet exercice est de déterminer les premiers coefficients de Fourier et les principales harmoniques d'un signal.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n = -\dfrac{1}{n}\sin n\dfrac{\pi}{2}$.
2. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que
$J_n = \dfrac{\pi}{2n}\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n^2}\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{n^2}$
3. Déterminer I_1, I_2 et I_3, puis J_1, J_2 et J_3.

Partie B

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},\ f(t) = \dfrac{2E}{\pi}t \\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} < t \leqslant \pi,\ f(t) = E \end{array}\right.$$

où E est un nombre réel donné, strictement positif.

1. Tracer, dans un repère orthogonal, la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi~;~+\pi]$ (on prendra $E = 2$ uniquement pour construire la courbe représentant f).
2. Soit a_0 et pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1, a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à f.
   a. Calculer a_0.
   b. Pour tout $n \geqslant 1$, donner la valeur de b_n.
   c. En utilisant la partie A, vérifier que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2E}{\pi^2}(2J_n + \pi I_n)$.
   Calculer a_{4k} pour tout entier $k \geqslant 1$.

Partie C

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, a_3.
2. Calculer F^2, carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
On rappelle que dans le cas où f est paire, périodique de période T, on a :

$$F^2 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

3. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$F^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Soit P le nombre défini par $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)$.

Calculer P, puis donner la valeur décimale arrondie au millième du rapport $\frac{P}{F^2}$.

Ce dernier résultat très proche de 1, *justifie que dans la pratique, on peut négliger les harmoniques d'ordre supérieur à* 3.

EXERCICE 2 — 10 points

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère la fonction H définie, pour tout nombre complexe p distinct de 0 et de -1, par :

$$H(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Dans toute la suite de l'exercice on prend $p = \mathrm{j}\omega$, où ω désigne un réel strictement positif.

1. On note $r(\omega)$ le module du nombre complexe $H(\mathrm{j}\omega)$ et on considère la fonction G définie, pour tout réel ω par :

$$G(\omega) = \frac{20}{\ln 10} \ln r(\omega).$$

a. Montrer que $G(\omega) = -\frac{20}{\ln 10} \ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$.

b. Déterminer les limites de la fonction G en 0 et en $+\infty$.
Montrer que la fonction G est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Montrer qu'un argument $\varphi(\omega)$ de $H(j\omega)$ est :

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\omega$$

b. Étudier les variations de la fonction φ sur $]0\,;\,+\infty[$ (on précisera les limites en 0 et en $+\infty$).

3. On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\omega \\ y(\omega) = -\frac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right) \end{array}\right. \quad \text{pour } \omega \text{ strictement positif.}$$

a. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions x et y.

b. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales arrondies au centième) :

ω	0,5	0,7	0,786	0,9	1,5
$x(\omega)$			$-2,24$		
$y(\omega)$			0		

c. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal, on prendra pour unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

La courbe $\mathscr{C}$ correspond au diagramme de Black associé à la fonction de transfert H.