∽ BTS Groupement A session 2001 ∾

EXERCICE 1 **12 points**

Partie A

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e, de période 2π, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lllll} e(t) & = & \sin t & \text{si} & t \in [0\,;\,\pi] \\ e(t) & = & 0 & \text{si} & t \in]\pi\,;\,2\pi[. \end{array}\right.$$

   a. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi\,;\,4\pi]$.

   b. Calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_1 et a_2 de la fonction e. On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

3. **a.** Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e.

   b. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

   Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

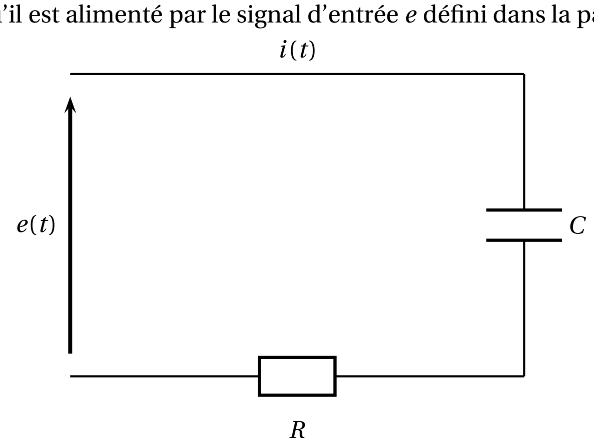
   Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \dfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2\right)$.

   Calculer P, puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\dfrac{P}{E^2}$.

   La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité i du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée e défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour $t \in [0~;~+\infty[$,

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = e(t) \quad (1).$$

Pour déterminer la fonction i on remplace le signal d'entrée e par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{3\pi}\cos(2t) \quad (2).$$

On admet que l'intensité i du courant est une fonction dérivable sur $[0~;~+\infty[$.

On suppose dans toute la suite de l'exercice que $R = 5\,000\,\Omega$ et $C = 10^{-4}$ F.

1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t + \left(\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\right)\sin(2t) \\ t \in [0~;~+\infty[\end{array}\right. \qquad (3).$$

2. Vérifier que la fonction i_1 telle que $i_1(t) = \left(4\cdot 10^{-5}\right)\cos t + \left(2\cdot 10^{-5}\right)\sin t$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(10^{-4}\right)\cos t \\ t \in [0~;~+\infty[\end{array}\right.$$

3. Déterminer une solution particulière i_2 de l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) + 2i(t) = \left(\dfrac{4}{15\pi}\cdot 10^{-3}\right)\sin(2t) \\ t \in [0~;~+\infty[\end{array}\right.$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition $i(0) = 0$.

EXERCICE 2 — 8 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
On s'intéresse dans cet exercice à deux courbes de Bézier C_1 et C_2.
C_1 est définie par les quatre points de contrôle $\mathrm{A}_0(0~;~3)$, $\mathrm{A}_1(0~;~-2)$, $\mathrm{A}_2(10~;~-2)$, $\mathrm{A}_3(5~;~3)$;
C_2 est définie par les trois points de contrôle $\mathrm{A}_0(0~;~3)$, $\mathrm{T}(0~;~8)$, $\mathrm{A}_3(5~;~3)$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de contrôle A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}M}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,\,n}(t)\overrightarrow{\mathrm{O}A_i} \quad \text{où} \quad B_{i,\,n}(t) = \mathrm{C}_n^i t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{avec } t \in [0~;~1].$$

1. Construction de la courbe C_1.

a. Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,\,3}(t)$, $(0 \leqslant i \leqslant 3)$.

b. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C_1 sont :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 30t^2 - 25t^3 \\ y & = & g_1(t) & = & 3 - 15t + 15t^2 \end{array}\right. \qquad t \in [0~;~1].$$

c. Étudier les variations de f_1 et g_1 et dresser le tableau des variations conjointes de ces deux fonctions.

d. Préciser les coordonnées des points de C_1 à tangentes parallèles aux axes de coordonnées.

e. Montrer que la droite (A_2A_3) est tangente à C_1 en A_3.

f. Tracer, en exploitant les résultats précédents, la courbe C_1 sur la feuille annexe.

2. Étude géométrique de la courbe C_2

La représentation paramétrique de la courbe C_2 est :

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_2(t) & = & 5t^2 \\ y & = & g_2(t) & = & 3+10t-10t^2 \end{array}\right.$$

La courbe C_2 est donnée sur la feuille annexe.

a. On définit, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, les points $N_1(t)$ et $N_2(t)$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{O}N_1(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} + t\overrightarrow{\mathrm{OT}} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}N_2(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OT}} + t\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}.$$

Justifier que les points $N_1(t)$ et $N_2(t)$ appartiennent respectivement aux segments $[A_0T]$ et $[TA_3]$.

b. Soit $G(t)$ le point défini, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, par

$$\overrightarrow{\mathrm{O}G(t)} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{O}N_1(t)} + t\overrightarrow{\mathrm{O}N_2(t)}.$$

Montrer que $G(t)$ appartient à C_2 et que la droite $(N_1(t)N_2(t))$ est tangente à C_2 en $G(t)$.

c. Placer les points $N_1\left(\dfrac{1}{5}\right)$, $N_2\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et $G\left(\dfrac{1}{5}\right)$ et la tangente à C_2 en $G\left(\dfrac{1}{5}\right)$.

Feuille annexe à rendre avec la copie