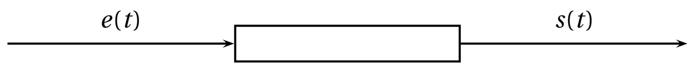
∽ BTS Groupement A 2002 ∾

EXERCICE 1 **12 points**

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geqslant 0.$$

On considère le système « entrée-sortie »représenté ci-dessous :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
On considère le signal d'entre e défini par :

$$e(t) = t\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1) - (t-2)\mathcal{U}(t-2)$$

et la fonction H définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.
2. Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.
3. Déterminer tes nombres réels A, B, et C tels que, pour tout $p > 0$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}$$

On admet que :

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}$$

4. **a.** Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.

   b. En déduire que la fonction s est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} s(t) & = & 0 & \text{si} \quad t < 0\\ s(t) & = & t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1\\ s(t) & = & t - 3 + \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e}) & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2\\ s(t) & = & \mathrm{e}^{-t}\left(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right) & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{array}\right.$$

5. On rappelle que la notation $f\left(a^+\right)$ représente la limite de la fonction f lorsque la variable t tend vers a par valeurs supérieures : $f\left(a^+\right) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t > a}} f(t)$. De même, $f\left(a^-\right) = \lim\limits_{\substack{t \to a \\ t < a}} f(t)$.

   a. Calculer $s\left(1^+\right)$, $s\left(1^-\right)$, $s\left(2^+\right)$, $s\left(2^-\right)$. Que peut-on en conclure pour la fonction s lorsque $t = 1$ et $t = 2$?

   b. Calculer $s'(t)$ sur chacun des intervalles $]0\,;\,1[$, $]1\,;\,2[$ et $]2\,;\,+\infty[$.
   On admet que s' est strictement positive sur $]0\,;\,1[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$.
   Déterminer le signe de $s'(t)$ sur l'intervalle $]1\,;\,2[$.

   c. Calculer la valeur exacte de $s[\ln(1 + 2\mathrm{e})]$. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$ et dresser le tableau des variations de la fonction s sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Calculer $s'\left(1^+\right)$, $s'\left(1^-\right)$, $s'\left(2^+\right)$, $s'\left(2^-\right)$. On admet que ces nombres sont respectivement les coefficients directeurs des demi-tangentes à droite et à gauche aux points d'abscisse 1 et d'abscisse 2 de la courbe Γ représentative de la fonction s.

6. On se place dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 50 cm sur l'axe des ordonnées.

a. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les valeurs numériques seront données à 10^{-2} près.

t	1	1,2	1,4	1,6	2	2,5	3	3,5
$s(t)$								

b. Tracer alors les tangentes ou demi-tangentes à la courbe Γ représentative de la fonction s aux points d'abscisses 0, 1, et 2. Tracer alors la courbe Γ.

EXERCICE 2 **8 points**

On se propose de résoudre le système différentiel (S) suivant, puis d'en déterminer une solution particulière.

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcll} x'(t)+2y(t) & = & -2\sin t & (E_1)\\ 2x(t)-y'(t) & = & -2\cos t & (E_2)\end{array}\right.$$

Les fonctions x et y sont des fonctions de la variable réelle t, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A

1. Montrer en utilisant les équations (E_1) et (E_2) que la fonction x vérifie, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :

$$x''(t)+4x(t) = -6\cos t \qquad (E)$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). En déduire les solutions du système (S).

3. Déterminer la solution particulière du système (S) vérifiant les conditions initiales $x(0) = -1$ et $y(0) = 0$.

Partie B

On considère la courbe (Γ) définie par la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rclcl} x & = & f(t) & = & \cos(2t)-2\cos t\\ y & = & g(t) & = & \sin(2t)-2\sin t\end{array}\right.$$

où t est un réel appartenant à l'intervalle $[-\pi\,;\,+\pi]$.

1. Montrer que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie en calculant $f(-t)$ et $g(-t)$.

2. **a.** Calculer $f'(t)$.

Montrer que : $f'(t) = -4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3t}{2}\right)$.

b. Établir le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

3. On admet que $g'(t) = -4\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\sin\left(\dfrac{3t}{2}\right)$ et que le signe de g' est donné par le tableau suivant :

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
Signe de $g'(t)$	0 $-$	0 $+$	

Dresser sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ le tableau des variations conjointes des fonctions f et g.

4. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) aux points B, C et D de paramètre respectifs $t_B = \dfrac{\pi}{3}$, $t_C = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_D = \pi$.

5. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On admet que la tangente à la courbe (Γ) au point A de paramètre $t_A = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{i}$. Tracer les tangentes aux points A, B, C et D puis la courbe (Γ).