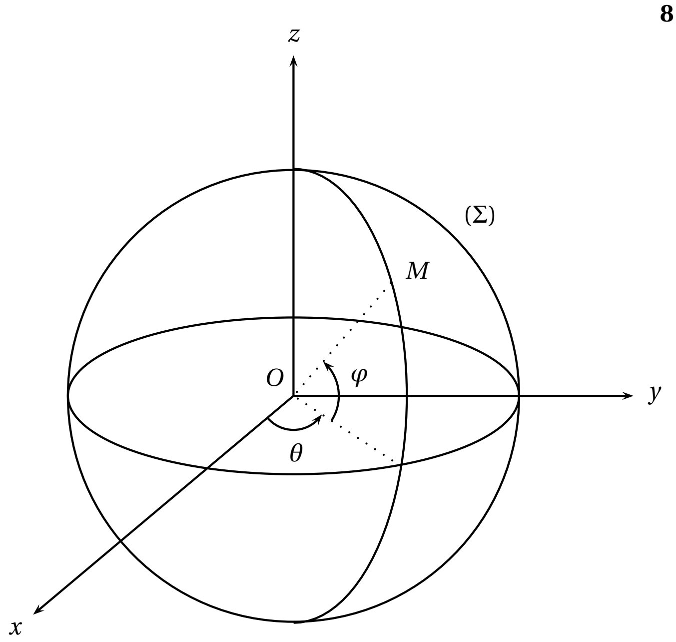
Brevet de technicien supérieur session 2009
Géomètre–topographe

Exercice 1 **8 points**



L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
(Σ) est la sphère de centre O et de rayon 1.
Tout point de (Σ) est repéré par le couple $(\theta\ ;\ \varphi)$ où θ est sa longitude et φ sa latitude (en radians). On considère sur (Σ) les points
$I(0\ ;\ 0)$, $J\left(\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right)$, $K\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $A\left(\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $B\left(\dfrac{\pi}{3}\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points I, J, K, A et B.
2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OJ}$.
   En déduire les longueurs des côtés du triangle sphérique ABJ en radians à 10^{-2} près.
3. Calculer, en radians à 10^{-2} près, la mesure en radians de l'angle $\hat{A}$ du triangle sphérique ABJ.
   Rappel :
   Pour un triangle sphérique ABC, avec les notations usuelles de la trigonométrie sphérique on a :
   $\cos a = \cos b\cdot\cos c + \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\hat{A}$.
4. Soit (P) le plan passant par les points I, J et K. écrire une équation cartésienne du plan (P).
5. Montrer que le point H de coordonnées cartésiennes $H\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur le plan (P).
6. En déduire la nature de l'intersection du plan (P) et de la sphère (Σ).
   Préciser les éléments caractéristiques de cet ensemble.

Exercice 2 **12 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'axes (Ox) et (Oy).
Soient A le point de coordonnées $A(1~;~0)$, (C) le cercle de diamètre $[OA]$, t un réel et (D_t) la droite passant par l'origine et par le point Q de coordonnées $(1~;~t)$.

1. Étude géométrique

a. Justifier que t est le coefficient directeur de la droite (D_t) et en déduire l'équation réduite de la droite (D_t).

b. Écrire une équation cartésienne du cercle (C).

c. La droite (D_t) coupe le cercle (C) au point O et au point N.
Montrer que le couple de coordonnées $(X(t)~;~Y(t))$ de N en fonction de t est : $N\left\{\begin{array}{l} X(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ Y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\end{array}\right.$

d. Soit M le point du plan tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$.
Montrer que le couple de coordonnées $(x(t)~;~y(t))$ de M en fonction de t est : $M\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}\end{array}\right.$

2. Étude d'une courbe paramétrée.
Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par (Γ) la courbe définie paramétriquement par : $(\Gamma)\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2}\end{array}\right.$ où t décrit $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, $M(x(t)~;~y(t))$ est distinct du point O et on rappelle que t est le coefficient directeur de la droite (D_t).

a. Montrer que la courbe (Γ) admet l'axe (Ox) comme axe de symétrie et en déduire que l'on peut étudier la courbe (Γ) pour $t \in]0~;~+\infty[$.

b. Étudier les limites des fonctions x et y quand t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe (Γ) ?

c. Montrer que les fonctions x et y ont pour dérivées : $x'(t) = \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{3t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$.

d. Étudier les variations des fonctions x et y pour $t \in]0~;~+\infty[$ et représenter les résultats **dans le tableau de l'annexe**.

e. Calculer : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)}$. En déduire la tangente à la courbe (Γ) au point O.

f. Tracer la courbe (Γ) dans le **repère représenté sur l'annexe**.
On placera les points de (Γ) pour les valeurs $t = 1$, $t = 2$ et $t = \sqrt{3}$.

3. Étude d'une inversion

On considère l'inversion I de pôle O et de puissance 1.

a. Déterminer les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1, image par l'inversion I du point $M(x(t)\,;\ y(t))$ de la courbe (Γ) privée de O, en fonction de t $(t \neq 0)$.
On rappelle la relation : $\overrightarrow{OM_1} = \dfrac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM}$.

b. Montrer que les coordonnées $x_1(t)$ et $y_1(t)$ du point M_1 vérifient l'équation $y^2 = x$.

c. Préciser la nature de la courbe (P) d'équation : $y^2 = x$ et en donner les éléments caractéristiques.

d. Tracer la courbe (P) dans **le repère de l'annexe**.

– ANNEXE à rendre avec la copie –

Exercice 2 : B. 4) .

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y(t)$	
$y'(t)$	

Repère et figure de l'exercice 2 :