Corrigé du brevet de technicien supérieur
Métropole - session 2010 - groupement A1 & A2

Exercice 1

Spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

Partie A

1. Voir figure 3 du document réponse 1.
2. **a.** On a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} 1\,t \\ &= \frac{1}{2\pi}\,t_0^{\tau} \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \end{aligned}$$

   b. On a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \cos(nt)\,t &= \frac{\sin(nt)}{n}{}_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{n}\sin(n\tau) \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \cos(nt)\,t \\ &= \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau) \end{aligned}$$

   c. On a aussi, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\tau} \sin(nt)\,t \\ &= \frac{1}{\pi}-\frac{\cos(nt)}{n}{}_0^{\tau} \\ &= \frac{1}{n\pi}1-\cos(n\tau) \end{aligned}$$

3. À l'aide de la question précédente, on a :

$$A_0 = a_0 = \frac{\tau}{2\pi}$$

   et pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n^2 + b_n^2 &= \frac{1}{n\pi}\sin(n\tau)^2 + \frac{1}{n\pi}1-\cos(n\tau)^2 \\ &= \frac{1}{n\pi}^2 \times \sin^2(n\tau) + 1 - 2\cos(n\tau) + \cos^2(n\tau) \\ &= \frac{1}{n\pi}^2 \times 2 \times 1 - \cos(n\tau) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{a_n^2+b_n^2}{2} = \frac{1}{n\pi}^{2} \times 1-\cos(n\tau)$$

alors

$$\text{pour } n \geq 1,\ A_n = \frac{1}{n\pi}\sqrt{1-\cos(n\tau)}$$

4. Voir tableau 1 du document réponse 2.

5. **a.** On a

$$\begin{aligned} h_{eff}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)^2\, t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\tau} 1^2\, t \\ &= \frac{1}{2\pi}\, t_0^{\tau} \\ &= \frac{\tau}{2\pi} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

b. À l'aide du tableau, on obtient

$$P \approx 0,0898$$

c. De même,

$$\frac{P}{h_{eff}^2} \approx 0,72$$

Partie B

1. On a

$$\begin{aligned} r(\omega) &= H(\omega) \\ &= \frac{3}{3+2\omega} \\ &= \frac{3}{3+2\omega} \\ &= \frac{3}{\sqrt{9+4\omega^2}} \end{aligned}$$

2. Voir tableau 2 du document réponse 2.

3. Voir figure 5 du document réponse 2.

4. **a.** À l'aide du tableau, on obtient

$$Q \approx 0,0491$$

b. On obtient

$$\frac{Q}{k_{eff}^2} \approx 0,95$$

Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

FIGURE 1 – Courbe représentative de la fonction f

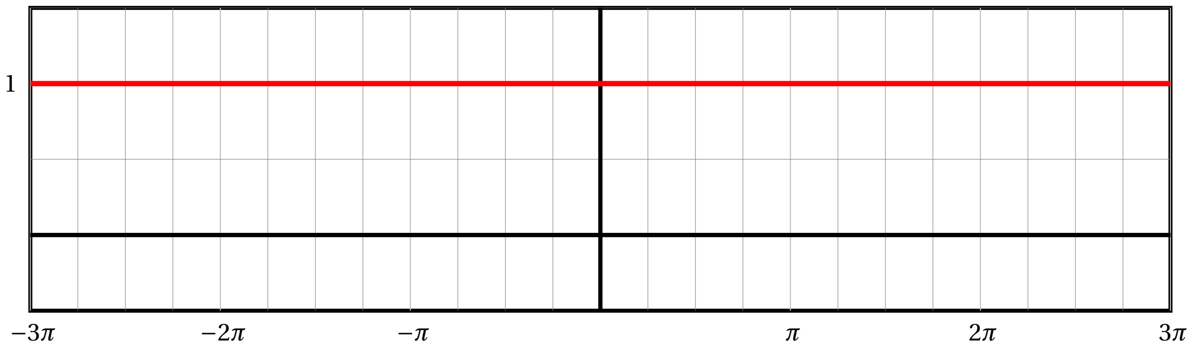


FIGURE 2 – Courbe représentative de la fonction g

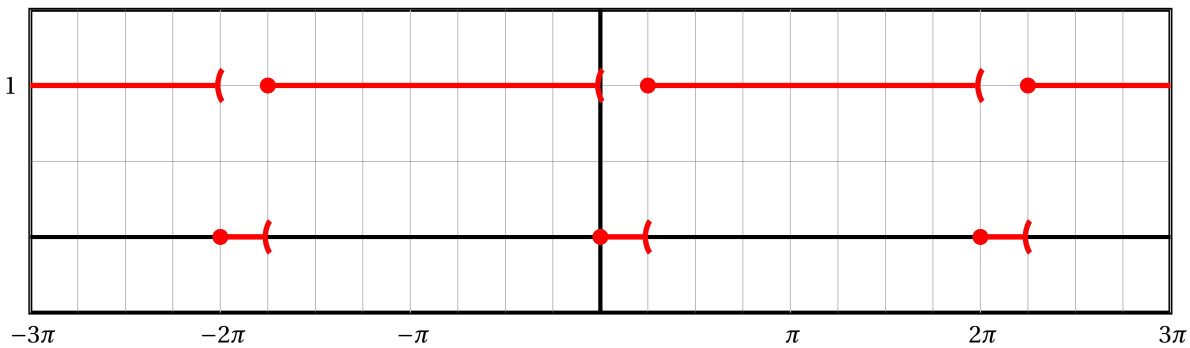
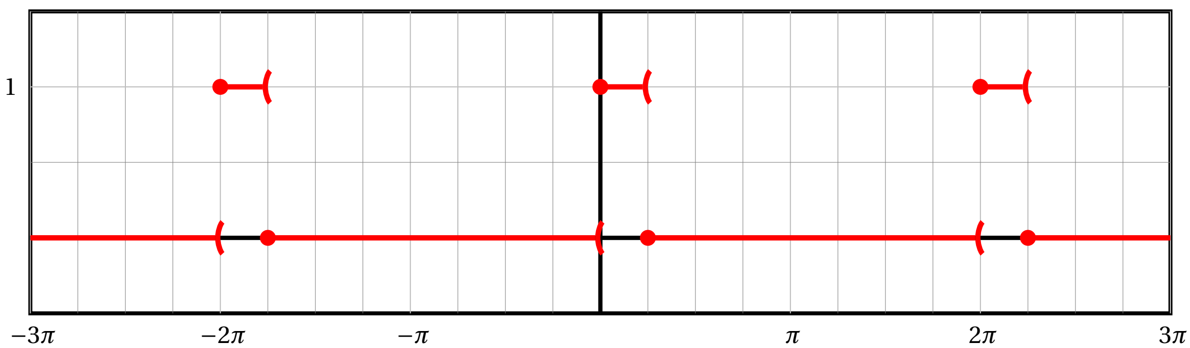


FIGURE 3 – Courbe représentative de la fonction h



Document réponse 1 de l'exercice,
spécialités CIRA, Électrotechnique, Génie optique, Systèmes électroniques, TPIL

Exercice

Spécialité IRIS

Partie A

TABLE 1 – Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7
A_n	0,12500	0,17227	0,15915	0,13863	0,11254	0,08318	0,05305	0,02461
n	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	0	0,01914	0,03183	0,03781	0,03751	0,03199	0,02274	0,01148

TABLE 2 – Tableau 2

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	0,12500	0,14334	0,09549	0,06200	0,03952	0,02390	0,01287	0,00516
n	8	9	10	11	12	13	14	15
B_n	0,00000	0,00315	0,00472	0,00511	0,00465	0,00367	0,00242	0,00114

FIGURE 4 –

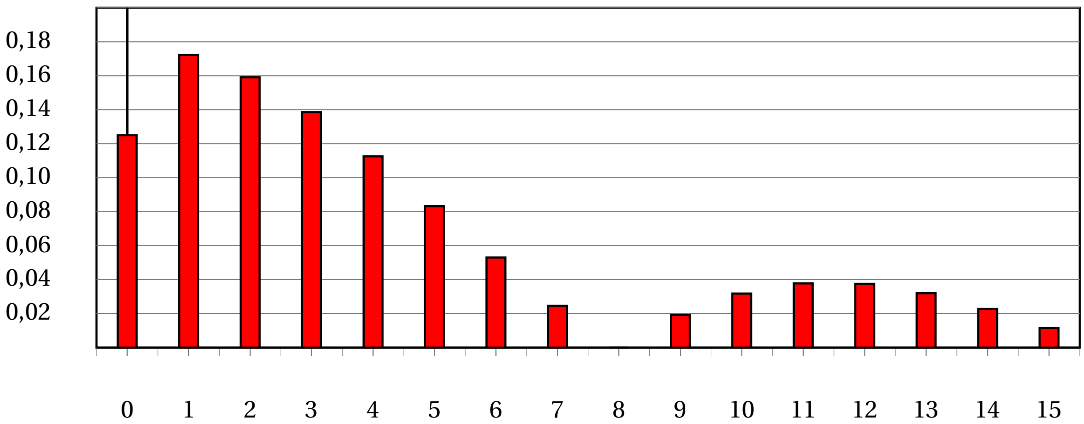
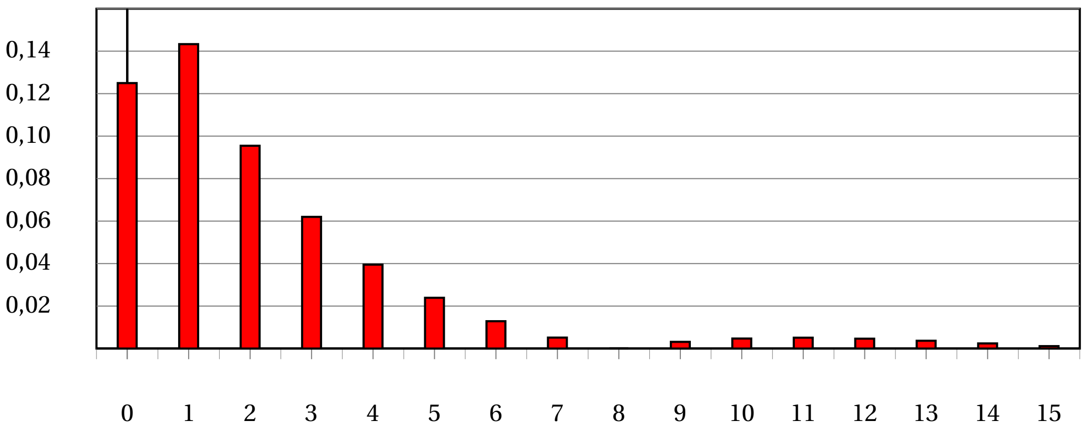


FIGURE 5 –



1. On a

$$\begin{aligned} _{2,3}(t) &= 32t^2(1-t)^{3-2} \\ &= 3t^2(1-t) \\ &= -3t^3+3t^2 \end{aligned}$$

2. Le point $M(t)$ est défini par :

$$OM(t) =_{0,3}(t)OA +_{1,3}(t)OS +_{2,3}(t)OR +_{3,3}(t)OO$$
$$= (-t^3+3t^2-3t+1)\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} + (3t^3-6t^2+3t)\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} + (-3t^3+3t^2)\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} x &= (-t^3+3t^2-3t+1)\times 4 + (3t^3-6t^2+3t)\times 12\\ &= 32t^3-60t^2+24t+4\\ &= f_1(t)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y &= (3t^3-6t^2+3t)\times 6 + (-3t^3+3t^2)\times 6\\ &= -18t^2+18t\\ &= g_1(t)\end{aligned}$$

3. Voir tableau 3 du document réponse.

4. On a

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 18(-t^2+t)\\ g_1'(t) &= 18(-2t+1)\end{aligned}$$

On a $g_1'(t) = 0 \iff t_1 = \frac{1}{2}$ et d'après la question précédente, on a bien un maximum pour l'ordonnée de $M(t)$.

5. On a de même :

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 48t^3-15t^2+6t+1\\ f_1'(t) &= 424t^2-30t+6\\ &= 4\times 64t^2-5t+1\end{aligned}$$

On a $f_1'(t) = 0 \iff t_0 = \frac{1}{4}$ ou $t_2 = 1$. D'après la question 3, on a bien un maximum en $t_0 = \frac{1}{4}$ pour l'abscisse de $M(t)$.

6. À $t = 0$, le point $M(0)$ est le point A.
Le vecteur tangent $V_1(0)$ à la courbe $_1$ au point A est le vecteur dérivé pour $t = 0$.
On a $V_1(0)2418$.
On a aussi : $AS86$.
D'où $V_1(0) = 3AS$: le vecteur tangent à la courbe $_1$ au point A est alors le vecteur AS.

Partie B

1. On veut alors $\begin{cases} f_2\frac{1}{2} = 1\\ g_2\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}\end{cases}$ d'où

$$\begin{aligned} 3(a+2)\frac{1}{2}^3 - 6(a+1)\frac{1}{2}^2 + 3a\times\frac{1}{2} &= -\frac{3}{2}\\ 3(a+2)-12(a+1)+12a &= -12\\ 3a+6 &= 0\\ a &= -2\end{aligned}$$

2. Pour $t = \frac{1}{2}$, il faut alors tracer les milieux respectifs des différents segments pour l'algorithme de De Casteljau.

— Première étape : construction des points g_1, g_2 et g_3 milieux respectifs des segments $[OE]$, $[EF]$ et $[FA]$;

— Seconde étape : construction des points G_1 et $G2$ milieux respectifs des segments $[g_1g_2]$ et $[g_2g_3]$;

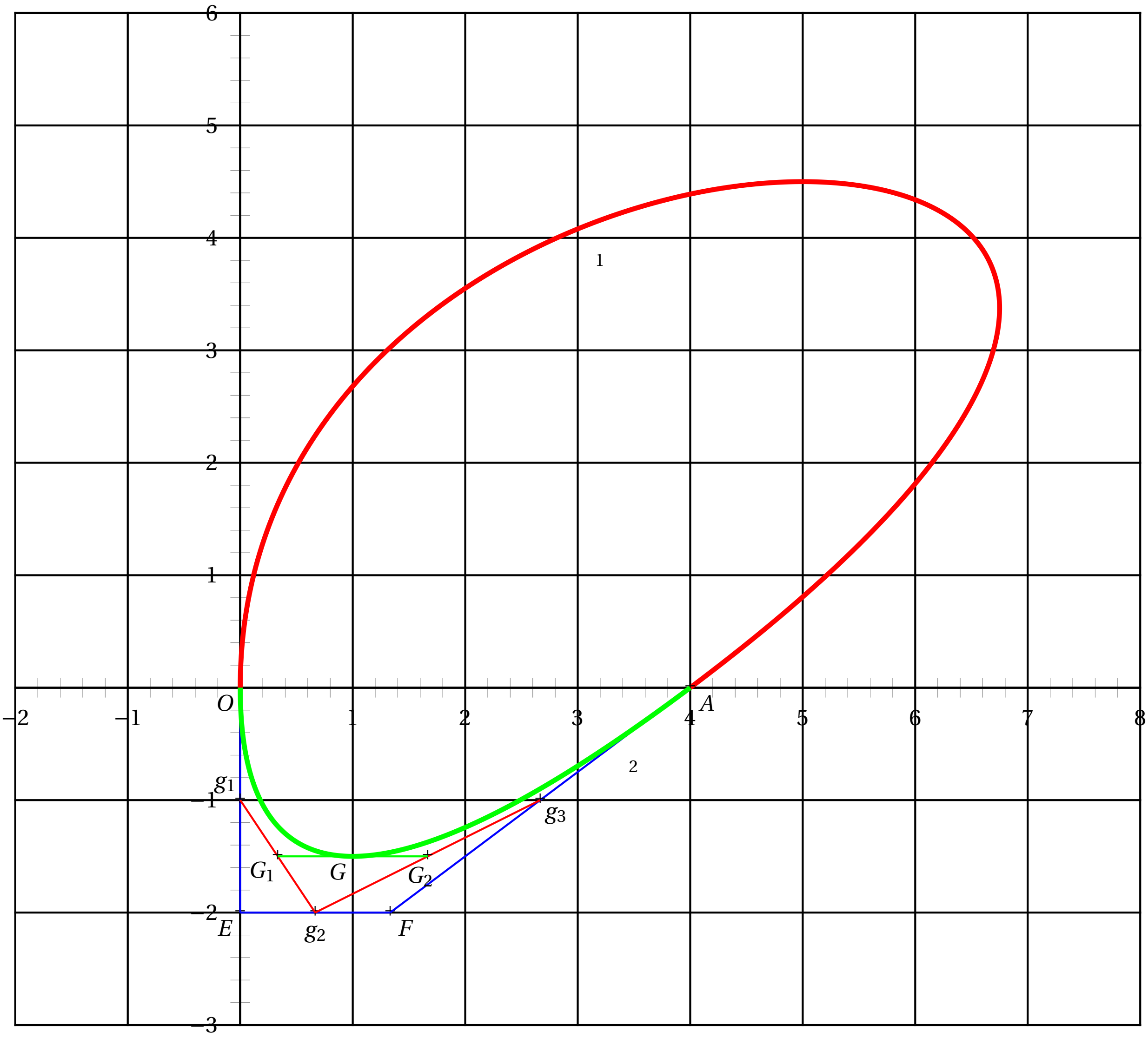
— Dernière étape : construction du point G milieu du segment $[G_1G_2]$.

Construction : voir figure 6 du document réponse.

3. Tracé de la courbe $_2$: voir figure 6 du document réponse.

Document réponse de l'exercice, spécialité IRIS

FIGURE 6 – Représentation graphique des courbes de Bézier



Exercice

Toutes spécialités

Partie A

TABLE 3 – Tableau des variations conjointes

x	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1
$f_1'(t)$	24	$+$	0	$-$	-12	$-$	0
$g_1'(t)$	18	$+$	9	$+$	0	$-$	-18
f_1	4	↗	$\frac{27}{4}$	↘	5	↘	0
g_1	0	↗	$\frac{27}{8}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	0

1. On recherche une solution particulière sous la forme d'une constante, alors on pose $y(t) = \alpha$ d'où $y'(t) = y''(t) = 0$.
En remplaçant dans (2), il vient $0 + 4\alpha = 20$ d'où $\alpha = 5$.
$y(t) = 5$ est une solution particulière de (2).

2. — Il faut tout d'abord résoudre l'équation homogène associée qui s'écrit

$$y''(t) + 4y(t) = 0$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + 4 = 0,$$

équation qui admet $r_1 = 2$ et $r_2 = -2$ comme racines.
La solution générale de l'équation homogène est alors

$$y(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels}$$

— La solution générale de l'équation différentielle (2) s'obtient en ajoutant la solution générale de l'équation homogène avec une solution particulière.
On obtient alors la solution générale sous la forme :

$$y(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5 \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels}$$

3. La fonction f cherchée est de la forme

$$f(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5$$

— On veut $f(0) = 0$ d'où $\lambda + 5 = 0$ c'est à dire $\lambda = -5$.
D'où $f(t) = -5\cos(2t) + \mu\sin(2t) + 5$.
— On obtient alors $f'(t) = 10\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$.
Or, on veut $f'(0) = 0$ d'où $2\mu = 0$ c'est à dire $\mu = 0$.
On a alors

$$f(t) = 51 - \cos(2t)$$

Partie B

1. À l'aide de la table des transformées, on obtient directement :

$$\begin{aligned} E(p) &= 8\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}{}^{-p\tau} \\ &= \frac{8}{p^2}1-^{-p\tau} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} g''(t) &= p^2G(p) - pg(0) - g'(0) \\ &= p^2G(p) \text{ car } g(0) = 0 \text{ et } g'(0) = 0 \end{aligned}$$

d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,

$$\begin{aligned} p^2G(p) + 4G(p) &= E(p) \\ (p^2+4)G(p) &= E(p) \\ G(p) &= \frac{E(p)}{p^2+4} \\ G(p) &= \frac{8}{p^2(p^2+4)}1-^{-p\tau} \end{aligned}$$

3. On a, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p^2+4} &= \frac{A(p^2+4) + Bp^2}{p^2(p^2+4)} \\ &= \frac{(A+B)p^2 + 4a}{p^2(p^2+4)} \end{aligned}$$

Par identification avec la relation demandée, on obtient le système

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 4A = 8 \end{cases}$$

d'où $A = 2$ et $B = -2$.
On a alors

$$\frac{8}{p^2(p^2+4)} = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^2+4}$$

4. On a

$$\frac{1}{p^2} = t(t)$$

et

$$\frac{2}{p^2+4} = \sin(2t)(t)$$

alors,

$$\frac{8}{p^2(p^2+4)} = 2t - \sin(2t)(t)$$

5. Avec les notations de l'énoncé, on obtient :

$$\frac{8}{p^2(p^2+4)} = g_0(t)$$

On a $G(p) = \frac{8}{p^2(p^2+4)} - \frac{8^{-p\tau}}{p^2(p^2+4)}$ d'où

$$g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau)$$

6. Pour $t \geqslant \tau$, on a $\begin{cases} (t) = 1 \\ (t-\tau) = 1 \end{cases}$ d'où

$$\begin{aligned} g(t) &= 2t - \sin(2t) - 2(t-\tau) - \sin 2(t-\tau) \\ &= 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t - 2\tau) \end{aligned}$$

7. **a.** Pour $\tau = \pi$ et $t \geqslant \tau$, on a

$$\begin{aligned} g(t) &= 2\pi - \sin(2t) + \sin(2t - 2\pi) \quad \text{or } \sin(2t - 2\pi) = \sin(2t) \\ &= 2\pi - \sin(2t) + \sin(2t) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

b. courbe : voir figure 7 du document réponse 2.

Document réponse 2 de l'exercice 2,
toutes spécialités

FIGURE 7 – Courbes représentatives des fonctions e et g