Brevet de technicien supérieur Nouvelle Calédonie novembre 2017 - groupement B

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - y' - 2y = -3\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction inconnue de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 - r - 2 = 0$.

   b. En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :

   $$y'' - y' - 2y = 0.$$

   On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle $ay'' + by' + c = 0$ Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\mathrm{e}^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $y(t) = [\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
   Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les résultats suivants qui sont admis.

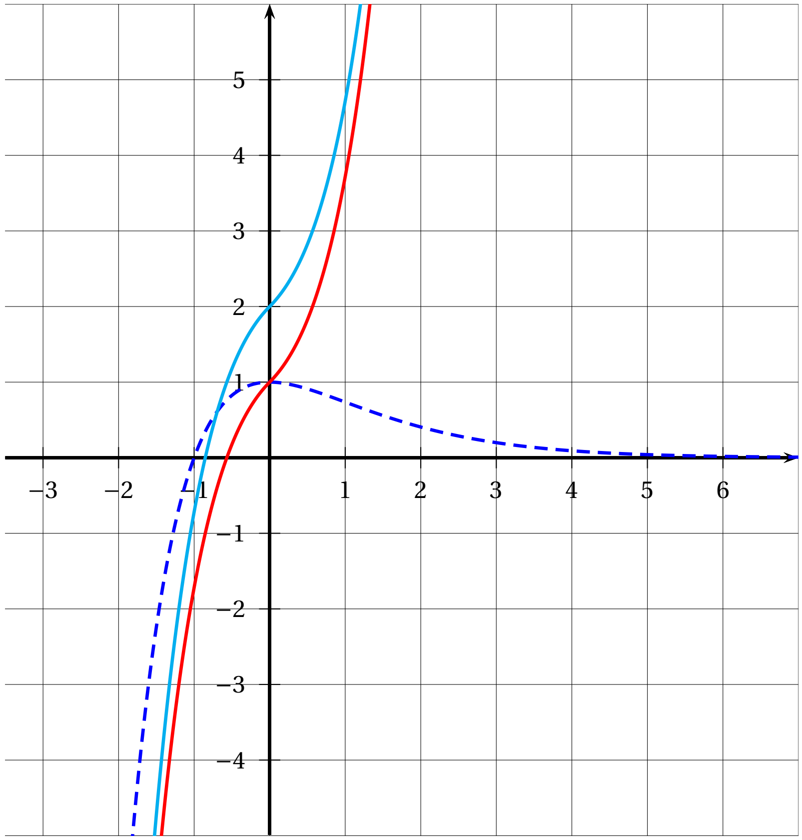
► Calcul formel	
1	$g(x) = x * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := x\mathrm{e}^{-x}$
2	$g'(x) = \text{Dérivée}[g(x), x]$ $\rightarrow g'(x); = -x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$
3	$g''(x) = \text{Dérivée}[g'(x), x]$ $\rightarrow g''(x) := x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}$

   Vérifier que la fonction g est une solution de (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   Parmi les courbes ci-dessous, quelle est la courbe représentative de la fonction f, solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$?



B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. **a.** On admet le résultat suivant : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Donner une interprétation graphique du résultat précédent.

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
   Recopier sur la copie la réponse qui vous paraît exacte. On ne demande aucune justification.
   La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

   Une expression de $f'(x)$ est donnée par :

$f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$	$f'(x) = -(1+x)\mathrm{e}^{x}$	$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$

3. **a.** Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $f'(x)$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

C. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^{\ln 3} f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction définie dans la partie B.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (-2 - x)\mathrm{e}^{-x}$$

est une primitive de la fonction f.
2. Montrer que $I = \dfrac{4 - \ln 3}{3}$.
3. Donner la valeur approchée de I arrondie à 10^{-3}.
4. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 2 **10 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante. Dans cet exercice, sauf mention du contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4}

A. Loi exponentielle

Une étude statistique a permis d'estimer que pour un certain modèle d'amortisseur équipant des véhicules, la durée de vie moyenne d'un amortisseur est 80 000 km.
On modélise la durée de vie, exprimée en kilomètre, d'un amortisseur de ce type par une variable aléatoire T de loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que :
— pour tout nombre réel positif t, on a $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$;
— l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T est égale à $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

1. Justifier que $\lambda = 0{,}000\,012\,5$.
2. **a.** Calculer $P(T \leqslant 30\,000)$.
   b. Interpréter le résultat précédent dans le contexte.
3. Déterminer la probabilité qu'un amortisseur de ce type fonctionne correctement après 120 000 km.

B. Loi uniforme

Un client doit déposer son véhicule dans un centre de contrôle technique entre 8 h et 9 h.
On modélise l'heure d'arrivée de ce client, exprimée en heure, par une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'intervalle $[8\,;\,9]$.

1. **a.** Calculer $P(X \leqslant 8{,}75)$.
   b. Interpréter le résultat dans le contexte
2. Calculer $E(X)$.

C. Loi binomiale et algorithme

Une étude nationale menée en 2015 a montré que 18,11 % des véhicules particuliers ayant subi un contrôle technique ont fait l'objet d'une contre-visite.
Une grande société spécialisée dans la réalisation des contrôles techniques a constaté que, parmi les contrôles qu'elle a réalisés en 2015, le pourcentage de ceux qui ont donné lieu à une contre-visite était exactement le même que le pourcentage national, soit 18,11 %.
Le responsable de cette société choisit au hasard 50 fiches-clients. Chaque fiche correspond à un contrôle technique réalisé. La fiche indique si le contrôle a été suivi d'une contre-visite ou non.
Le nombre de fiches-clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 fiches-clients, associe le nombre de contre-visites.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'avoir, dans un tel prélèvement, exactement 10 contre-visites.
3. On considère l'algorithme suivant où binomiale(n ; p ; k) désigne $P(Y = k)$ dans le cas où Y suit la loi binomiale de paramètres n et p.

```
Initialisation
k prend la valeur 0
S prend la valeur binomiale(50 ; 0,1811 ; 0)
Traitement
Tant que S < 0,95
        k prend la valeur k + 1
        S prend la valeur S + binomiale(50 ; 0,1811 ; k)
Fin de Tant que
Affichage
Afficher k
```

Faire tourner cet algorithme « à la main »en recopiant sur la copie et en complétant, à partir de $k = 12$, le tableau ci-dessous.

Valeur de k	Valeur de S arrondie à 10^{-4}	Condition $S < 0,95$
0	0	VRAIE
1	0,000 6	VRAIE
2	0,003 3	VRAIE
...	...	...
11	0,817 7	VRAIE
12		

4. Quelle est la valeur numérique affichée par l'algorithme ?

D. Loi normale et test d'hypothèse d'une proportion

Dans cette partie, on considère un réseau de centres de contrôles techniques. On se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral pour contrôler si la proportion de véhicules soumis à une contre-visite dans ce réseau est la même que la proportion nationale en 2015, à savoir 18,11 %.
On note p la proportion inconnue de véhicules soumis à une contre-visite dans ce réseau.
On note F la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 véhicules prélevé au hasard parmi les véhicules contrôlés dans le réseau, associe la fréquence de ceux soumis à une contre-visite.
On admet que F suit la loi normale de moyenne p et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
L'hypothèse nulle H_0 est : « $p = 0,181\,1$ ».
L'hypothèse alternative est : « $p \neq 0,181\,1$ ».
Le seuil de signification du test est fixé à 5 %.

1. On admet que sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,181 1 et d'écart type 0,038 5.
   Calculer, sous l'hypothèse H_0, $P(0,1056 \leqslant F \leqslant 0,2566)$. Arrondir à 10^{-2}.
2. Énoncer la règle de décision du test.
3. On observe que sur un échantillon aléatoire de 100 véhicules de ce réseau, 21 véhicules ont été soumis à une contre-visite.
   Donner la conclusion du test.