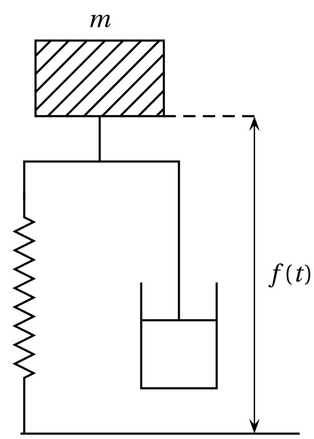
Brevet de technicien supérieur Nouvelle Calédonie
4 novembre 2019 - groupement B [1]

Exercice 1 **10 points**

Dans cet exercice, on modélise le système de suspension d'une voiture radiocommandée par le schéma ci-contre.
Le masse m repose au sol à l'aide d'une suspension amortie.
On désigne par $f(t)$ la hauteur, en dm, par rapport au sol de la massa m à l'instant t en seconde.
On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$.



Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équatIon différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 10y' + 25y = 20,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0~;~+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 10r + 25 = 0$.

   b. En déduire les solutions, définies sur $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle (E_0) :

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

On fournit les formules suivantes :

Équations	Solutions sur un intervalle I
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$. Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ	Si $\Delta > 0$, $y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique. Si $\Delta < 0$, $y(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

1. Assistance technique d'ingénieur, Batîment, Études et économie de la construction, Maintenance des systèmes

2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*
Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

La fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par l'expression suivante est solution de l'équation différentielle (E) :

$g(t) = 0,8$	$g(t) = 20$	$g(t) = \mathrm{e}^{-5t}$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Les conditions initiales du système mécanique conduisent à poser $f(0) = 0,4$ el $f'(0) = 0$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de la fonction f.

1	RésolEquaDiff$\left(y'' + 10y' + 25y = 20,\ y,\ t,\ (0,0.4), (0,0)\right)$ $\to y = -2t\mathrm{e}^{-5t} - \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{-5t} + \dfrac{4}{5}$

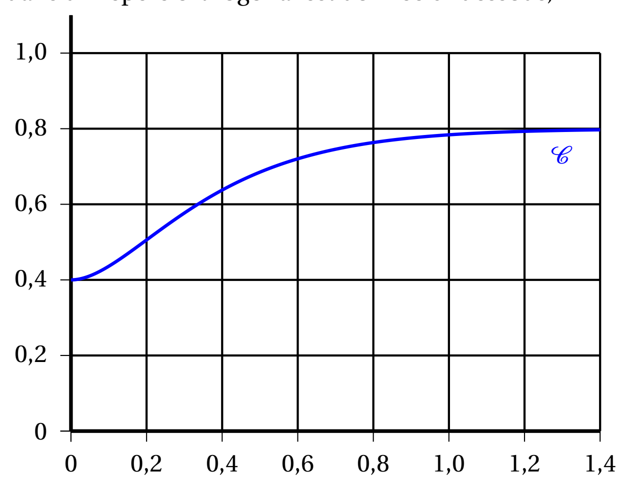
Quelle est la hauteur de la masse, en dm, au bout d'une seconde ? Arrondir à 10^{-2}.

B Étude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = -2t\mathrm{e}^{-5t} - 0,4\mathrm{e}^{-5t} + 0,8.$$

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous,



1. On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{t\to+\infty} t\mathrm{e}^{-5t} = 0$.

- **a.** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
- **b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote dont on donnera une équation.

2.
- **a.** Montrer que pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 10t\mathrm{e}^{-5t}$.
- **b.** Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,
- **c.** Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$

3. Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

PolynômeTaylor$\left(-2te^{-5t}-\dfrac{2}{5}e^{-5t}+\dfrac{4}{5},\ t,\ 0,\ 2\right)$
2
$\to \dfrac{2}{5}+5t^2$

a. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

C. Dépassement d'un seuil et algorithmique

On considère l'algorithme suivant.

$t \leftarrow 1,6$
$y \leftarrow (-2t-0,4)e^{-5t}+0,8$
Tant que $0,8-y>10^{-3}$
    $t \leftarrow t+0,01$
    $y \leftarrow (-2t-0,4)e^{-5t}+0,8$
Fin de Tant que

Remarque : dans cet algorithme $t \leftarrow 1,6$ signifie que t prend la valeur 1,6.

1. Faire tourner cet algorithme « à la main » jusqu'a son arrêt, en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

t	1,6	1,61				
$y \approx$	0,798 79					
$0,8-y>10^{-3}$	VRAI					

2. Quelle est la valeur de la variable t a la fin de l'algorithme ?

Exercice 2 **10 points**

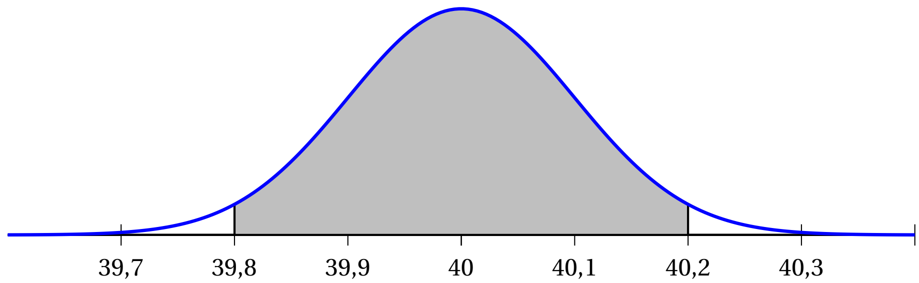
Une machine à commande numérique permet de fabriquer des panneaux en MDF (panneaux de fibre de bois de moyenne densité) de 40 mm d'épaisseur.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Loi normale

Un panneau est considéré comme « acceptable » si son épaisseur est comprise entre 39,78 mm et 40,22 mm. S'il n'est pas considéré comme acceptable, il sera renvoyé au recyclage.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque panneau fabriqué par la machine, associe son épaisseur en mm. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 40$ et d'écart type σ inconnu.

1. En utilisant la capture d'écran ci-dessous, expliquer pourquoi on peut approcher la valeur de σ par 0,1.



$P(39,8 \leqslant X \leqslant 40,2) = 0,95$

2. On admet que $\sigma = 0,1$.

a. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un panneau, prélevé au hasard dans la production de la machine, soit considéré comme acceptable.

b) En déduire la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'un panneau, prélevé au hasard dans la production de la machine, soit envoyé au recyclage.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Un grossiste commande un lot de 200 panneaux en MDF. On admet que la probabilité qu'un panneau prélevé au hasard dans la production soit envoyé au recyclage est $0,03$. La production est suffisamment importante pour assimiler un lot de 200 panneaux comme résultant d'un tirage au hasard avec remise dans la production.
On note Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 200 panneaux ainsi prélevé, associe le nombre de panneaux à envoyer au recyclage.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.

3. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, d'avoir dans un lot de 200 panneaux, au plus deux panneaux à envoyer au recyclage.

4. On approche la loi de la variable aléatoire Y par une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Z une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

a. Justifier que $\lambda = 6$.

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} de $P(Z \leqslant 2)$.

c. Calculer l'écart entre les résultats des questions **3.** et **4. b**.

C. Test d'hypothèse

L'entreprise veut vérifier que la proportion de panneaux présentant un défaut d'épaisseur est $p = 0,03$. Pour cela, elle réalise un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 % sur un échantillon aléatoire de 400 panneaux prélevés dans le stock. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 400 panneaux, associe la fréquence des panneaux présentant un défaut d'épaisseur. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{400}}$.
L'hypothèse nulle H_0 est : « $p = 0,03$ ».
L'hypothèse alternative H_1 est : « $p \neq 0,03$ ».

1. Justifier que sous l'hypothèse H_0 l'écart type de la variable aléatoire F est environ $0,009$.
2. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification. La réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

   Soit a le réel positif, tel que, sous l'hypothèse H_0, $P(0,03 - a \leqslant F \leqslant 0,03 + a) = 0,95$.

   Une valeur approchée de a à 10^{-3} près est :

0,009	0,017	0,023

3. Énoncer la règle de décision du test.
4. Sur l'échantillon aléatoire de 400 panneaux prélevés, on a relevé 18 panneaux ayant un défaut d'épaisseur.

   Quelle est la conclusion du test ?