Brevet de technicien supérieur Métropole septembre 2020 - Groupement B

Exercice 1 — 10 points

Un jouet pour enfant prévu pour être utilisé en extérieur, est un bonhomme de neige monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur et retombe ensuite au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical.

On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

On modélise la hauteur que peut atteindre le jouet par une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 3\,;$$

y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$;
x représente la durée d'utilisation, exprimée en années ;

y' désigne la fonction dérivée de y et y'' désigne la fonction dérivée seconde de y.

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

On fournit les formules suivantes :

Équations	**Solutions sur un intervalle *I***
Équation différentielle : $ay'' + by' + cy = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 x} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 x}$ où r_1 et r_2 sont les solutions de l'équation caractéristique. Si $\Delta = 0$, $f(x) = (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{rx}$ où r est la solution double de l'équation caractéristique.
Équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ de discriminant Δ.	Si $\Delta < 0$, $f(x) = \left[\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\right]\mathrm{e}^{\alpha x}$ où $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ sont les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit un nombre réel k, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction constante g telle que $g(x) = k$.
   Déterminer la valeur de k pour que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes : $f(0) = 4$ et $f(2) = 5\,\mathrm{e}^{-2} + 3$.

Partie B : Étude de la fonction f

La hauteur exprimée en décimètres que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = (2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} + 3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm donnée en **Annexe**.

1. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation, c'est-à-dire pour $x = 0$?

2. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet après 6 mois d'utilisation ?
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

3. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} + 3$.

- **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- **b.** En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$, dont on donnera une équation puis tracer cette droite $\mathscr{D}$ sur le document fourni en **Annexe (à rendre avec la copie)**.
- **c.** Interpréter cette limite dans le contexte de la situation étudiée.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

- **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-x}$.
- **b.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

5. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = (-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2}.

Exercice 2 — 10 points

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \quad \text{et } \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geqslant 0.$$

On considère un système électrique entrée-sortie. On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions e et s sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On considère le signal d'entrée e définie sur $\mathbb{R}$ par $e(t) = \mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t-1)$ et la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. **a.** Calculer $e(0,5)$ et $e(2)$.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans le repère orthonormé fourni en **Annexe 2 (à rendre avec la copie)**

Remarque : on pourra calculer entre autres $e(-0,5)$, $e(0)$, $e(0,9)$, $e(1)$.

2. Pour tout $p > 0$, déterminer $E(p)$, E étant la transformée de Laplace du signal e. (On pourra utiliser le formulaire donné).

3. **a.** Donner alors l'expression de $S(p)$.

b. Vérifier que pour tout $p > 0$, $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

c. Justifier alors que pour tout $p > 0$, $\quad S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} - 2 \times \dfrac{1}{p} \times \mathrm{e}^{-p} + 2 \times \dfrac{1}{p+1} \times \mathrm{e}^{-p}$.

4. Compléter le tableau fourni en **Annexe 2**, avec l'original des fonctions suivantes :

$$p \longmapsto \frac{1}{p}\,;\; p \longmapsto \frac{1}{p+1}\,;\; p \longmapsto \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}\,;\; p \longmapsto \frac{1}{p+1}\mathrm{e}^{-p}$$

En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.

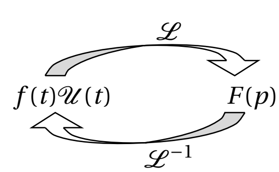
5. On admet que l'expression de la fonction s sur $[1\,;\,+\infty[$ est : $s(t) = (2\mathrm{e}1)\mathrm{e}^{-t} - 1$.

a. Calculer $s(1)$.

b. Compléter la courbe représentative de la fonction s dans le repère orthonormé fourni dans l'**Annexe 2**.

c. Donner la limite de la fonction s en $+\infty$.

On pourra utiliser le formulaire suivant :



On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathscr{L}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathscr{L}[f] + \mu \mathscr{L}[g].$$

$$\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)] = \frac{1}{p}.$$

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)\right] = \frac{1}{p+a}.$$

Plus généralement, si on note $\mathscr{L}[f(t)\mathscr{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)\mathscr{U}(t-\tau)] = F(p)\,\mathrm{e}^{-\tau p};$$

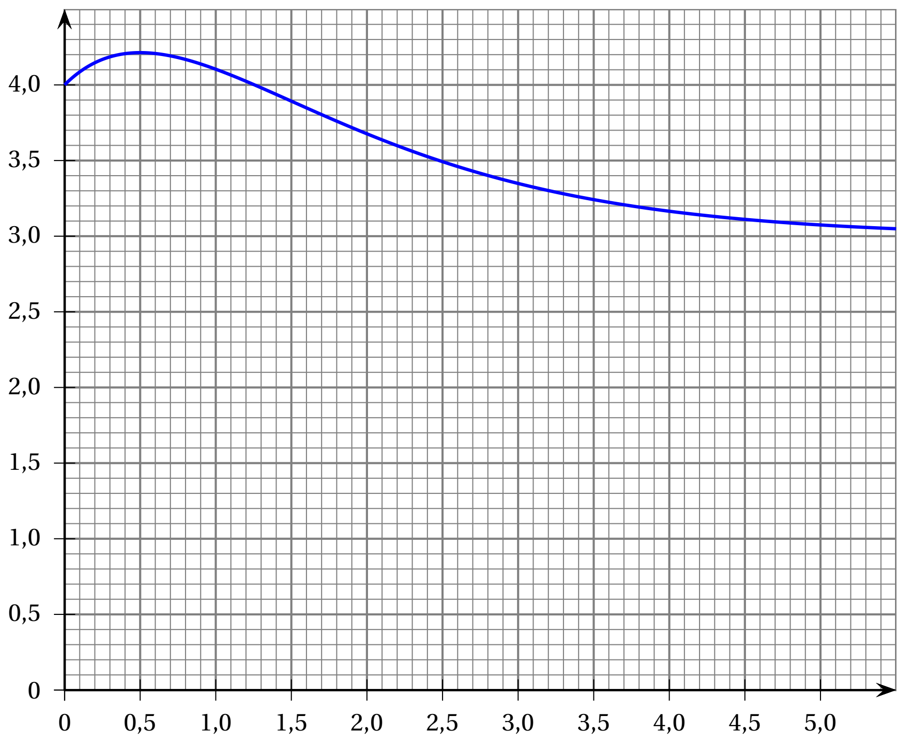
$$\mathscr{L}\left[f(t)\,\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)\right] = F(p+a);$$

$$\mathscr{L}\left[f'(t)\mathscr{U}(t)\right] = pF(p) - f\left(0^+\right);$$

$$\mathscr{L}\left[f''(t)\mathscr{U}(t)\right] = p^2F(p) - pf\left(0^+\right) - f'\left(0^+\right).$$

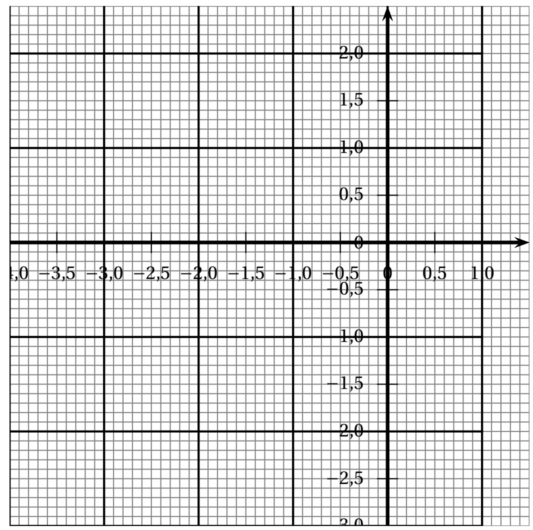
Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1. Partie B. Question 3.b.



Annexe 2 (Exercice 2) à rendre avec la copie

Question 1. b. : Courbe du signal d'entrée e



Question 4 : Tableau à compléter

Transformée	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+1}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+1}\mathrm{e}^{-p}$
Original				$\mathrm{e}^{-t(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$

Question 6 : Courbe du signal de sortie s