∽ Brevet de technicien supérieur novembre 2013 ∾ groupement A Nouvelle-Calédonie

Exercice 1 **11 points**

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

1 Partie A

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + 40y' + 2\,000y = 0(1)$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (1).
2. On considère la fonction f, définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(t) = \mathrm{e}^{-20t}\sin(40t).$$

La courbe représentative Γ de la fonction f figure sur le document réponse n° 1.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On admet que, pour tout nombre réel t,

$$f'(t) = \mathrm{e}^{-20t}[40\cos(40t) - 20\sin(40t)].$$

a. Justifier que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (1) puis que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 40$.

b. Le développement limité, à l'ordre 2 au voisinage de 0, de la fonction f s'écrit sous la forme

$$f(t) = 40t - 800t^2 + t^2\epsilon(t), \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

i. Donner une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

ii. Étudier la position relative de la courbe Γ par rapport à la tangente T au voisinage de 0.

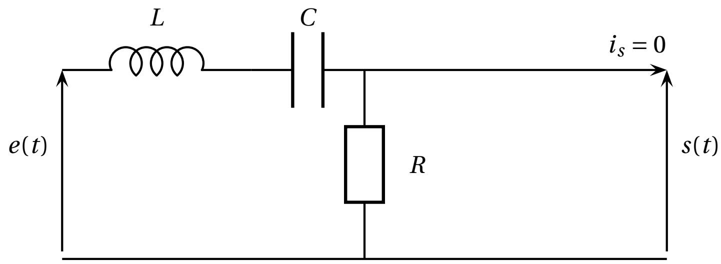
iii. Sur le document réponse n° 1, tracer la droite T.

2 Partie B

On désigne par U la fonction échelon unité, définie pour tout nombre réel t par :

$$\left\{\begin{array}{lll} U(t) & = & 0 \quad \text{si } t < 0\\ U(t) & = & 1 \quad \text{si } t \geqslant 0\end{array}\right.$$

On considère le filtre suivant :



Les constantes R, L et C sont des réels strictement positifs caractéristiques du circuit.
À l'entrée de ce filtre, on applique une tension modélisée par une fonction e.
En sortie, on recueille une tension modélisée par une fonction s.
Les éléments du circuit sont traversés par un même courant et l'intensité à la sortie, notée i_s, est nulle.
On suppose que les deux fonctions e et s sont nulles pour tout nombre réel t strictement négatif et qu'elles admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.
Les fonctions e et s sont telles que, pour tout nombre réel t strictement positif,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}s(t) + \frac{1}{LC}\int_0^t s(u)\,\mathrm{d}u = \frac{R}{L}e(t). \qquad (2)$$

De plus, $s(0) = 0$. On suppose que

$$R = 20\ \Omega, \quad L = 0,5\ \text{H} \quad \text{et} \quad C = 0,001\ \text{F}.$$

1. La fonction e est définie, pour tout nombre réel t, par

$$e(t) = U(t).$$

Déterminer $E(p)$.

2. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de la relation (2), déterminer une expression de $S(p)$.

3. Vérifier que

$$S(p) = \frac{40}{(p+20)^2 + 40^2}.$$

4. a. Déterminer l'original de $\dfrac{40}{p^2 + 40^2}$.

b. En déduire l'expression de $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

c. La courbe représentative de la fonction s est tracée sur l'annexe n° 1.
Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel t_1 à partir duquel la valeur absolue de $s(t)$ est strictement inférieure à 0,05, c'est-à-dire à partir duquel, pour tout réel $t > t_1$, $|s(t)| \leqslant 0,05$.

Exercice 2 — 9 points

Partie A

Un signal est modélisé par la fonction f, paire et périodique de période 2π, définie pour tout nombre réel t par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{\pi}{2} - t & \text{si} \quad t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[\\ f(t) = 0 & \text{si} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$ sur la figure 1 du document réponse n° 2.

2. On admet que la fonction f est développable en série de Fourier.
Dans la suite de l'exercice, a_0, a_n et b_n désignent les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction f, avec les notations du formulaire.
   a. Démontrer que $a_0 = \dfrac{\pi}{8}$.
   b. Justifier que $b_n = 0$ pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.
   c. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$
   d. En déduire la valeur exacte de a_1.
3. On pose $A_0 = a_0$. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n l'amplitude de l'harmonique de rang n. On rappelle que
$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.
   a. Sur la figure 1 de l'annexe n° 2, on a construit le diagramme en bâtons donnant A_n^2 en fonction de n jusqu'à $n = 5$.
Pour tout nombre entier $n \geqslant 5$, l'amplitude A_n est négligeable.
À l'aide de ce diagramme, compléter le tableau 1 du document réponse n° 2 avec des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. On note P la puissance moyenne du signal modélisé par la fonction f, exprimée en fonction de ses coefficients de Fourier. D'après la formule de Bessel-Parseval, on a
$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$
Déduire de la question précédente une valeur approchée de P.

Partie B

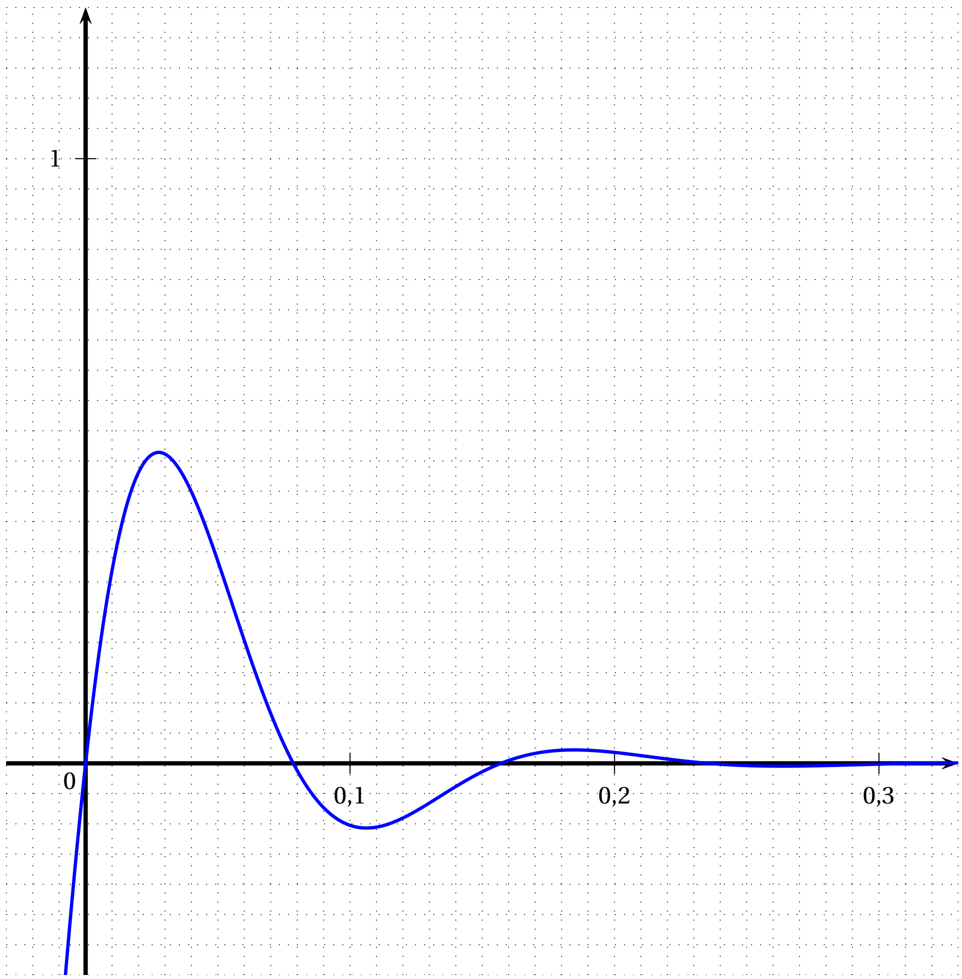
On considère la fonction g, définie pour tout nombre réel t par
$$g(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) + \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

1. **a.** Calculer la dérivée g' de la fonction g.
   b. Calculer la valeur exacte de $g'\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$ pour tout entier k compris entre 0 et 3.
2. Sur la figure 2 de l'annexe n° 2, on a représenté graphiquement la fonction g'.
À l'aide de ce graphique et de la question 1, compléter le tableau de variation de la fonction g sur le document réponse n° 2. On pourra donner une valeur approchées à 10^{-2} près de l'extremum.
3. Construire sur la figure n° 1 du document réponse n° 2 la courbe représentative de la fonction g sur $[-2\pi\ ;\ 4\pi]$.
4. Un étudiant se propose d'afficher sur sa calculatrice la représentation graphique de la fonction g. Parmi les trois réglages suivants de la fenêtre de sa calculatrice, lequel vous semble le plus adapté ? Justifier.

	Rep 1	Rep 2	Rep 3
X min	0	0	0
X max	π	π	π
Y min	-2	0	$-0,1$
Y max	2	2	1,5

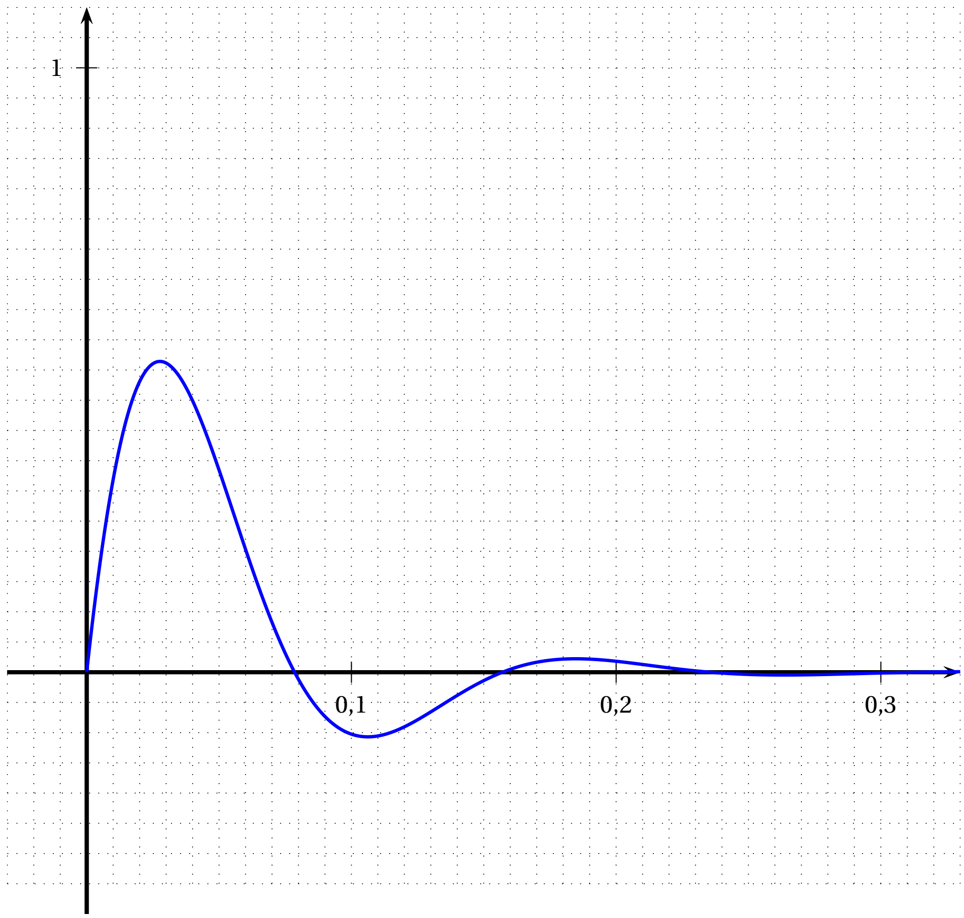
Document réponse n° 1 à rendre avec la copie

La courbe Γ



Document réponse n° 1 à rendre avec la copie

Courbe représentative de la fonction s



Annexe n° 2

Figure 1

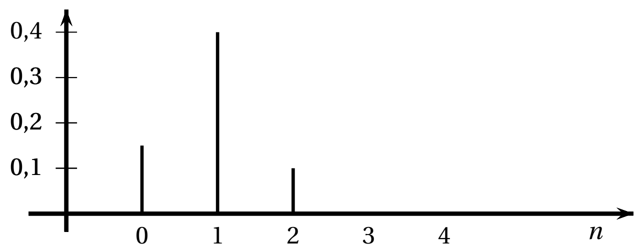
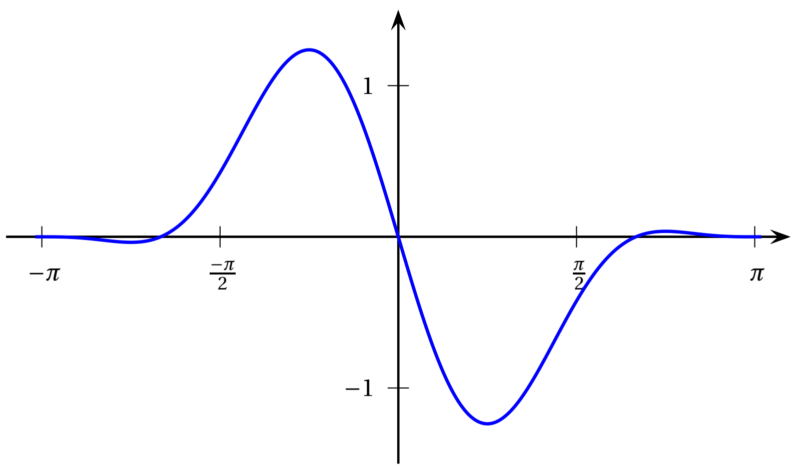


Figure 2



Document réponse n° 2 à rendre avec la copie

Figure 1

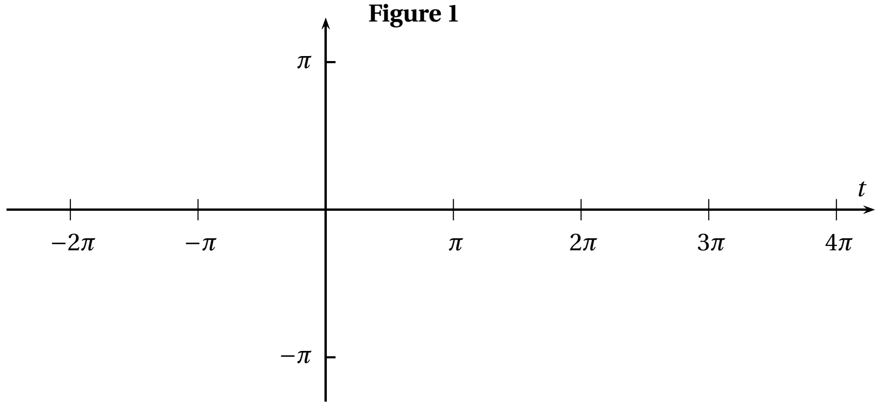


Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5
A_n^2	$0,15$				0,00	0,00

Tableau de variation de la fonction g

ω	0	π
0	0	0
$g(t)$		