Brevet de technicien supérieur session 4 novembre 2019
Groupement A – Nouvelle Calédonie

Spécialités :
— Électrotechnique
— Systèmes phoniques
— Techniques physiques pour l'industrie et le laboratoire

Exercice 1 **3 points**

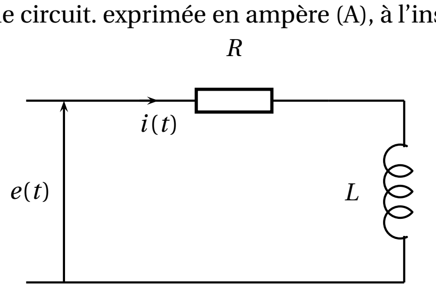
Les deux questions de cet exercice sont indépendantes

Une usine produit des bobines électriques.

1. 3 % des bobines produites sont défectueuses. On constitue un échantillon de 100 bobines prises au hasard dans la production. Cette production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 bobines.
   On modélise le nombre de bobines défectueuses contenues dans un échantillon de 100 bobines par une variable aléatoire X.
   a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? On ne demande pas de justifications.
   b. Quelle est la probabilité qu'un échantillon de 100 bobines contienne au plus 3 bobines défectueuses ? Arrondir au centième.
2. Une des chaînes de fabrication de l'usine doit répondre à une commande spécifique.
   On modélise l'inductance, exprimée en henry (H) d'une bobine par une variable aléatoire Y.
   On admet que Y suit la loi normale de moyenne $m = 1$ et d'écart type $\sigma = 0,02$.
   Quelle est la probabilité qu'une bobine prise au hasard dans la production ait une inductance comprise entre 0,96 H et 1,04 H ? Arrondir au centième.

Exercice 2 **11 points**

On considère un circuit composé d'une résistance et d'une bobine en série.
On note :
- R la valeur de la résistance, en ohm (Ω),
- L l'inductance de la bobine en henry (H),
- $e(t)$ la tension aux bornes du circuit. exprimée en volt (V), à l'instant t exprimé en seconde (s).
- $i(t)$ l'intensité dans le circuit. exprimée en ampère (A), à l'instant t (en seconde).



On rappelle que la fonction échelon unité est la fonction définie pour tout réel t par :

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour la partie A de l'exercice.

Équations différentielles	**Solutions sur un intervalle I**
$ay'(t) + by(t) = 0$ où a et b sont des constantes réelles, a étant non nulle.	$y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, où k désigne une constante réelle.
Fonction	**Dérivée**
$t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$, avec a constante réelle.	$t \longmapsto a\mathrm{e}^{at}$.

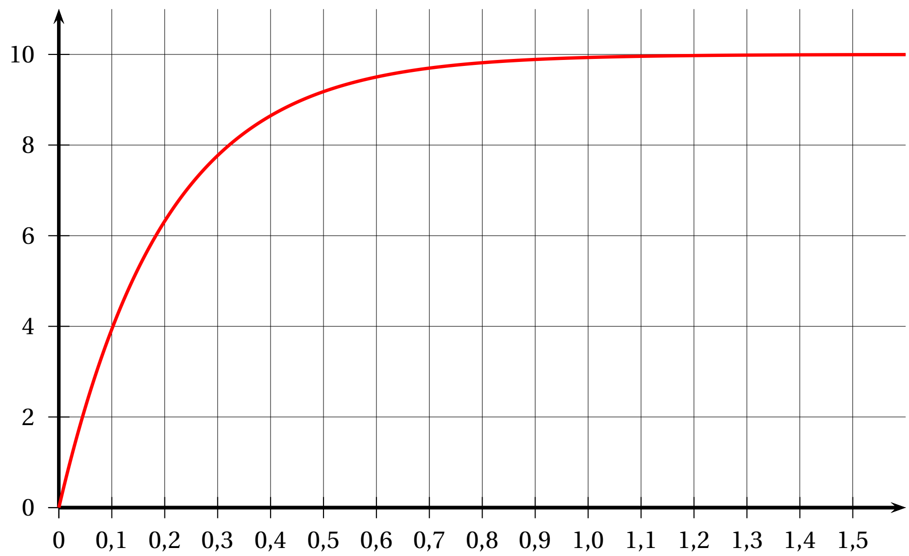
Partie A : Réponse échelon du circuit

Dans cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 0,2$ H et on étudie le comportement du circuit lorsqu'on applique soudainement une tension continue modélisée. pour tout réel t, par $e(t) = 10\mathcal{U}(t)$.
À l'instant $t = 0$ le courant dans le circuit est nul.
On admet que la fonction i est solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad Ly' + Ry = e(t)$$

d'inconnue y, où y est une fonction dérivable de la variable t.

1. **Dans cette question, ou cherche une expression de** $i(t)$ **pour** $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
   a. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 0,2y' + y = 0$.
   b. Déterminer une fonction constante $g : t \longmapsto c$, avec c constante réelle, solution de l'équation différentielle $(E) : 0,2y' + y = 10$.
   c. En déduire les solutions de l'équation (E).
   d. Justifier que pour tout réel positif ou nul t : $i(t) = 10 - 10\mathrm{e}^{-5t}$.
2. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction i sur $[0\ ;\ +\infty[$.



   a. On admet que le développement limité d' ordre 2 de la fonction i au voisinage de 0 est

$$i(t) = 50t - 125t^2 + t^2\varepsilon(t) \text{ où } \lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0.$$

   En déduire l'équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction i au point d'abscisse 0. Puis tracer cette tangente **sur la figure 1 du document réponse**.
   b. Déterminer graphiquement l'intensité i_s vers laquelle le courant i se stabilise dans le circuit et l'abscisse τ du point de la tangente T dont l'ordonnée vaut i_S.
   Cette valeur τ est une constante de temps caractéristique du circuit. On considère qu'à 5τ le circuit est passé du régime transitoire au régime permanent.
   On note $u_L(t)$ la tension aux bornes de la bobine exprimée en volt, à l'instant t (en seconde). On admet que pour tout réel $t \geqslant 0$: $u_L(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ou encore $u_L(t) = Li'(t)$.
   Calculer $u_L(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

c. L'énergie, exprimée en joule (J), stockée par la bobine pendant la phase transitoire est donnée par $E_L = 100\displaystyle\int_0^1 u_L(t)i(t)\,\mathrm{d}t$.

On admet que : $E_L = 100\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-5t} - \mathrm{e}^{-10t}\right)\mathrm{d}t$.

Calculer la valeur exacte de E_L puis donner sa valeur arrondie à 10^{-2}.

Le formulaire ci-dessous peut être utilisé pour la partie B de l'exercice

Fonction causale	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto \mathscr{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
f étant une fonction causale et F sa transformée de Laplace, on a aussi :	
$t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-\alpha)\mathscr{U}(t-\alpha)$, avec α constante réelle	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto f'(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$

Partie B : Réponse impulsionnelle du circuit

Dons cette partie, on prend $R = 1\Omega$, $L = 1\text{H}$ et la tension e aux bornes du circuit est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$e(t) = 20U(t) - 20U(t-10).$$

On note $s(t)$ la tension aux bornes de la résistance. exprimée en volt. à l'instant t (en seconde).

On admet que $s(0) = 0$ et que $\dfrac{L}{R}s'(t) + s(t) = e(t)$.

On note respectivement S et E les transformées de Laplace des fonctions s et e.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction e **sur la figure 2 du document réponse** sur laquelle est déjà représentée la fonction s.
2. Déterminer $E(p)$.
3. En appliquant la transformation de Laplace à l'égalité vérifiée par s et e, montrer que

$$S(p) = \frac{20}{p(p+1)}\left(1 - \mathrm{e}^{-10p}\right)$$

4. **Détermination de $s(t)$ en fonction de t**

a. Vérifier que : $\dfrac{20}{p(p+1)} = \dfrac{20}{p} - \dfrac{20}{p+1}$.

b. Donner les originaux de $p \to \dfrac{20}{p}$, $p \to \dfrac{20}{p+1}$, $p \to \dfrac{20}{p}\mathrm{e}^{-10p}$ et $p \to \dfrac{20}{p+1}\mathrm{e}^{-10p}$.

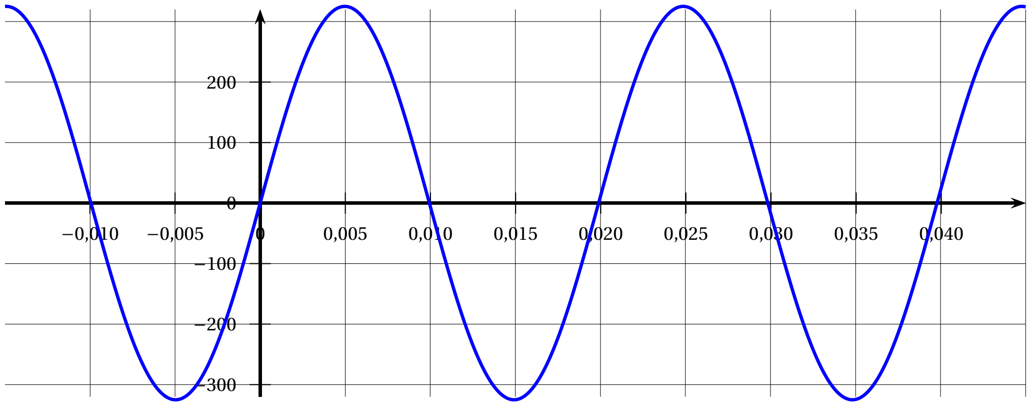
c. En déduire $s(t)$

d. Vérifier que pour $t \in [10\,;\,+\infty[$, $s(t) = 20\left(\mathrm{e}^{10} - 1\right)\mathrm{e}^{-t}$.

On peut remarquer que « la réponse suit l'entrée », mais avec un certain retard. Ce délai est dû à la bobine, un composant qui emmagasine de l'énergie.

EXERCICE 3 (6 points)

Dans cet exercice on compare le redressement mono-alternance et le redressement double-alternance d'une tension alternative monophasée sinusoïdale $u(t)$ de fréquence 50 hertz (Hz), représentée ci-dessous et donnée par : $u(t) = 325\sin(100\pi t)$ pour tout réel t.



On rappelle que

- lorsque une fonction périodique f de période T et fréquence F, est développable en série de Fourier et que l'on note S son développement en série de Fourier, on a :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right),$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$,

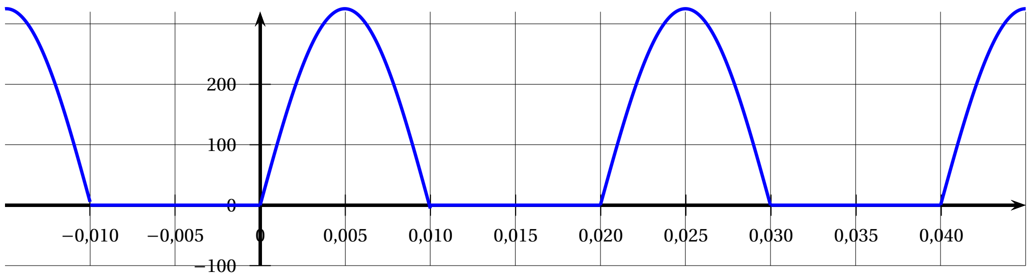
et, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.

- l'amplitude de la composante continue du développement est $A_0 = |a_0|$.
- pour $n \geqslant 1$ l'harmonique de rang n a pour fréquence $\dfrac{n\omega}{2\pi}$, soit nF, et pour amplitude

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Partie A : Redressement mono-alternance

Avec un redresseur mono-alternance on obtient, à partir de $u(t)$, la tension $u_1(t)$ représentée ci-dessous.



On a $u_1(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 0{,}01 \\ 0 & \text{si} \quad 0{,}01 \leqslant t \leqslant 0{,}02 \end{cases}$

1. On admet que la fonction u_1 est périodique. Déterminer graphiquement sa période T.
2. Calculer la valeur moyenne a_0 de la fonction u_1. Écrire sur la copie les étapes du calcul.

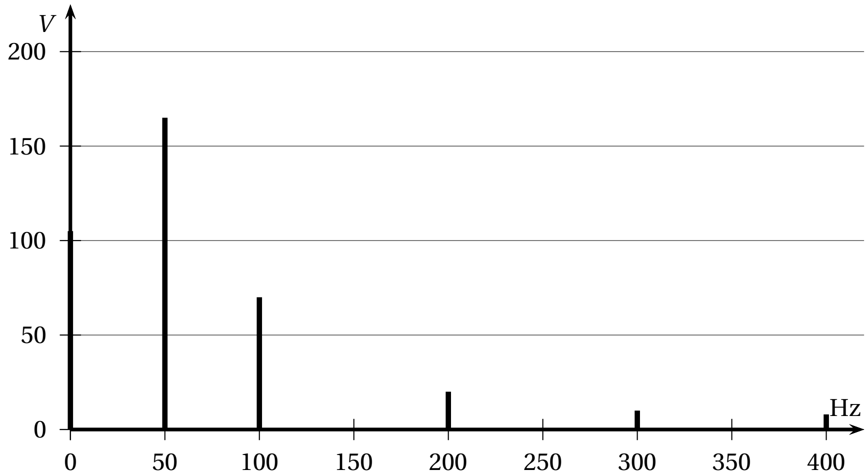
3. On admet que la fonction u_1 est développable en série de Fourier et que son développement en série de Fourier est :

$$S_1(t) = \frac{325}{\pi} + \frac{325}{2}\sin(100\pi t) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \cos(100n\pi t)$$

$$\text{avec, pour } n \geqslant 1,\ a_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } a_n = \frac{-650}{\pi\left(n^2-1\right)} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Compléter le **tableau 1 du document-réponse** dans lequel figurent les valeurs, arrondies à 10^{-1}, des coefficients de Fourier a_n et b_n associés à la fonction u_1 et des amplitudes A_n de sa composante continue et de ses harmoniques.

À partir de ce tableau, on obtient le spectre du signal u_1 :



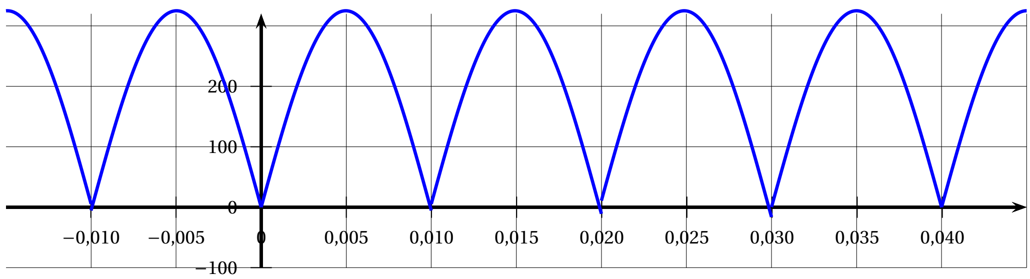
4. On note $u_{1,e}$ la valeur efficace de la tension u_1 exprimée en volt.
On rappelle que, d'après la formule de Parseval, on a

$$u_{1,e}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

Déduire du **tableau 1** une valeur approchée de $u_{1,e}^2$, puis une valeur approchée de $u_{1,e}$ arrondie à l'unité.

Partie B : Comparaison avec le redressement double-alternance

Avec un redresseur double-alternance on obtient à partir de $u(t)$, la tension $u_2(t)$ représentée par la courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées partiellement donnée ci-dessous.



On a : $u_2(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 0,01 \\ -u(t) & \text{si} \quad 0,01 \leqslant t \leqslant 0,02 \end{cases}$

On admet que la fonction u_2 est périodique de période $T_2 = 0,01$.

On admet aussi que la fonction u_2 est développable en série de Fourier et a pour développement :

$$S_2(t) = a_0' + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n'\cos(n\omega t) + b_n'\sin(n\omega t)\right), \text{ avec } a_0' = \frac{650}{\pi}.$$

1. **Coefficients de Fourier de la fonction u_2**

   a. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $b'_n = 0$.

   b. À l'aide d'une calculatrice formelle, on a obtenu le résultat suivant :

$$\int_0^{0,01} 325\sin(100\pi t)\cos(200\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{-65}{10\pi\left(4n^2-1\right)}.$$

   En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$: $a'_n = \dfrac{-1\,300}{\pi\left(4n^2-1\right)}$.

2. On donne, dans le **tableau 2** figurant dans le document réponse. les valeurs de a'_n et A'_n arrondies à l'unité.

   À l'aide de ces valeurs, représenter sur **la figure 3** du document réponse. les harmoniques de rang $n = 1$ et $n = 2$ associés respectivement aux fréquences 100 Hz et 200 Hz.

3. **Comparaison du redressement mono-alternance et du redressement double-alternance**

   a. On admet que la valeur efficace $u_{2,\,e}$ de la tension u_2 exprimée en volt. vaut environ 230 V.

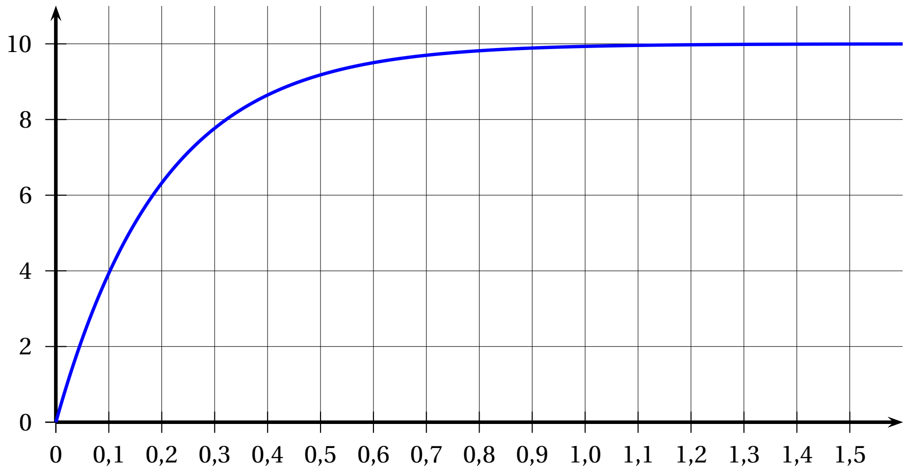
   En calculant $\dfrac{a_0^2}{u_{1,\,e}^2}$ et $\dfrac{{a'_0}^2}{u_{1,\,e}^2}$, déterminer dans quel redressement la part de la composante continue est la plus importante.

   b. Une fréquence du fondamental (harmonique de rang 1) élevée sera plus facilement éliminée par un traitement ultérieur. Quel est le type de redressement qui facilitera ce traitement ?

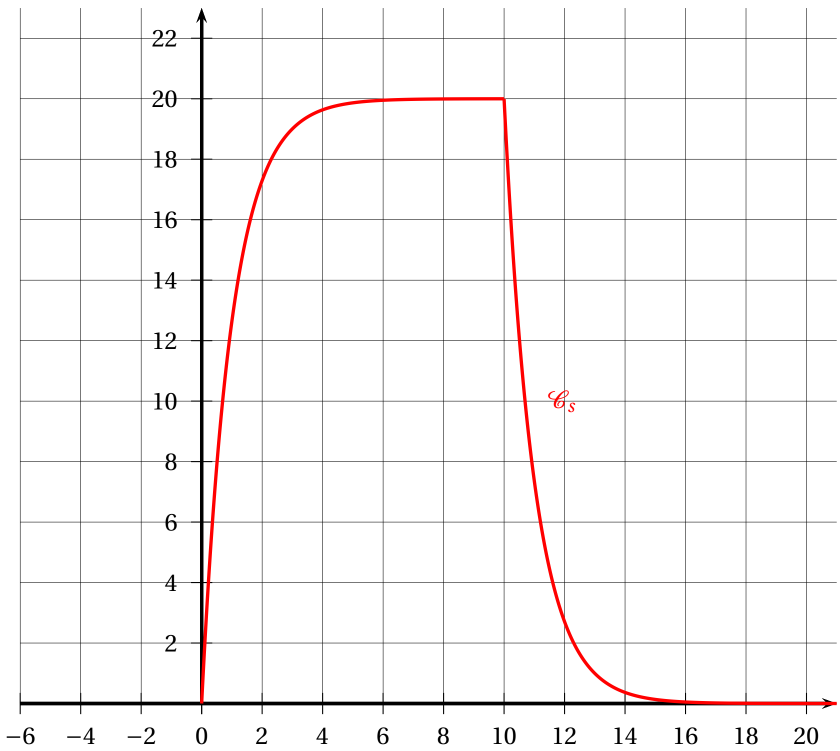
   Justifier.

DOCUMENT REPONSE à rendre avec la copie

Exercice 2 - A- 2. a. - Figure 1 – Courbe représentative de i



Exercice 2 - B-1. – Figure 2 – Courbes représentatives des fonctions e et s.



Exercice 3 - A-3. - Tableau 1

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de a_n arrondie à 10^{-1}			$-69,0$			0			$-3,3$
Valeur de b_n arrondie à 10^{-1}			0	0	0	0	0	0	0
Voleur de A_n arrondie à 10^{-1}		162,5		0					

Exercice 3 - B–2

Tableau 2

n	0	1	2	3	4
Valeur de a'_n arrondie à l'unité	207	-138	-28	-12	-7
Valeur de A'_n arrondie à l'unité	207	138	28	12	7

Figure 3 - Spectre de la tension u_2