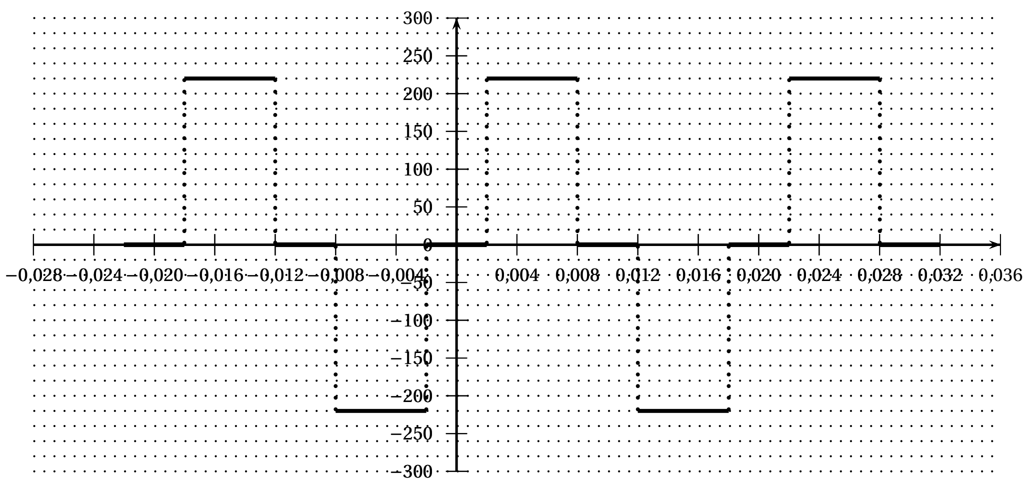
Brevet de technicien supérieur 2017
Nouvelle Calédonie groupement A

Exercice 1 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des quatre questions posées, une seule des réponses proposées est exacte.
Indiquer sur ***la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie***. *On ne demande aucune justification.*
Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

On modélise une tension en aval d'un convertisseur Continu - Alternatif, appelé onduleur à commande décalée, par la fonction v de la variable t définie sur $\mathbb{R}$.
t est le temps, exprimé en seconde, et $v(t)$ la tension, exprimée en volt, à l'instant t.
La courbe ci-dessous, symétrique par rapport à l'origine du repère, représente la fonction v.



On admet que la fonction v est périodique de période T, est développable en série de Fourier et vérifie, pour tout réel t :

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right), \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On rappelle que :

- a_0 est la valeur moyenne de la fonction v sur l'intervalle $[\alpha\,;\,\alpha + T]$, quelle que soit la valeur de la constante réelle α. On a donc : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} v(t)\,\mathrm{d}t$.
- La valeur efficace V_{ef} de la fonction v vérifie : $V_{\text{ef}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [v(t)]^2\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction v est :

a. impaire **b.** paire **c.** ni paire ni impaire **d.** paire et impaire

2. La pulsation ω (en rad/s) est égale à :

a. 100π **b.** 110π **c.** 125π **d.** 200π

3. Le coefficient a_0 est égal à :

a. 132 **b.** 66 **c.** 0 **d.** 110

4. La valeur efficace V_{ef}, exprimée en volt et arrondie à l'unité, est égale à :

a. 220 **b.** 170 **c.** 120 **d.** 0

Exercice 2 **9 points**

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

On s'intéresse à une entreprise qui fabrique des tablettes tactiles avec un écran de 9,7 pouces et des étuis pour ces tablettes.

Partie A : Étude des dimensions des tablettes

Le service Packaging de l'entreprise réalise une étude sur la longueur et la largeur des tablettes fabriquées afin qu'elles soient compatibles avec les dimensions des étuis produits.
On note :

- L la variable aléatoire qui associe à chaque tablette fabriquée sa longueur en millimètre (mm),
- l la variable aléatoire qui associe à chaque tablette fabriquée sa largeur en millimètre.

1. La longueur d'une tablette est compatible avec celle de son étui lorsqu'elle est comprise entre 241,9 mm et 243,1 mm.
On admet que la variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne 242,5 et d'écart-type 0,2.
a. Calculer $P(241,9 \leqslant L \leqslant 243,1)$. Arrondir à 10^{-4}.
b. Interpréter la valeur obtenue.

2. On admet que la variable aléatoire l suit la loi normale de moyenne 166,8 et d'écart-type 0,1.
Pour mettre en place la norme de fabrication relative à la largeur des étuis, le service Packaging recherche le plus petit nombre décimal à deux chiffres après la virgule, noté α , tel que :

$$P(166,8 - \alpha \leqslant l \leqslant 166,8 + \alpha) > 0,995.$$

a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira à 10^{-4}.

a	0,27	0,28	0,29	0,30
$P(166,8 - \alpha \leqslant l \leqslant 166,8 + \alpha)$				

b. En déduire la valeur du nombre a cherché et l'intervalle $[166,8 - \alpha ; 166,8 + \alpha]$ associé.

Partie B : Étude d'un défaut de l'étui

L'étui est fabriqué en cuir recouvert de polyuréthane appelé « cuir PU ».
Un certain nombre d'étuis a été retourné à l'entreprise pour défaut de rigidité. L'enquête statistique conduite par le service Qualité de l'entreprise permet de considérer que la probabilité p qu'un étui comporte un défaut de rigidité est égale à 0,015.
On prélève un lot de 100 étuis. La production de l'entreprise est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à 100 tirages aléatoires avec remise d'un étui.
On appelle R la variable aléatoire qui, à chaque lot ainsi prélevé, associe le nombre d'étuis présentant un défaut de rigidité contenus dans le lot.

1. Sans justifier, indiquer la loi suivie par la variable aléatoire R et ses paramètres.
2. Donner la valeur de $P(R=2)$, arrondie à 10^{-3}, puis interpréter ce résultat.
3. Peut-on affirmer que la probabilité qu'un lot de 100 étuis prélevés dans la production comporte plus de 5 étuis présentant un défaut de rigidité est inférieure à 0,02 ? Justifier la réponse.

Partie C : Étude des délais de livraison

La production journalière des tablettes et de leurs étuis étant constante, le stock est suffisamment important et les délais de livraison ne dépendent que du nombre de commandes qui sont à traiter.
On note D la variable aléatoire qui, à chaque commande, associe le nombre de jours écoulés entre le jour où le client a effectué sa commande et le jour où il a été livré.
La variable aléatoire D permet donc d'étudier les délais de livraison de l'entreprise.

On admet que pour tout réel positif ou nul a : $P(0 \leqslant D \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quelle est la probabilité que le client reçoive sa livraison dans les 15 jours suivant sa commande ?
   Écrire les étapes du calcul effectué et arrondir la réponse à 10^{-3}.
2. Pour tout réel positif x on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{8}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t$.
   a. Soit la fonction G définie, pour tout réel positif t, par : $G(t) = -t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t} - 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}$.
   Montrer que la fonction G est une primitive de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{8}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}$.
   b. En déduire l'expression de $I(x)$ en fonction de x.
3. On admet que l'espérance de la variable aléatoire D, que l'on notera $E(D)$, est définie par :
   $$E(D) = \lim_{x\to+\infty} I(x).$$
   a. On rappelle que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Donner la valeur de $E(D)$. Aucune justification n'est attendue.
   b. Que représente la valeur de $E(D)$ pour le client ?

Exercice 3 **7 points**

On rappelle que la fonction échelon unité est définie pour tout réel t par : $\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t<0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

On donne, dans le tableau ci-dessous, quelques transformées de Laplace de fonctions usuelles et quelques formules pouvant être utiles.

Fonction	Transformée de Laplace de la fonction
$t \mapsto U(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p}$
$t \mapsto tU(t)$	$p \mapsto \frac{1}{p^2}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}U(t)$, a réel	$p \mapsto \frac{1}{p+a}$
$t \mapsto U(t-\alpha)$, α réel	$p \mapsto \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p}$

Fonction	Transformée de Laplace de la fonction
$t \mapsto f(t)$	$p \mapsto F(p)$
$t \mapsto f(t-\alpha)U(t-\alpha)$, α réel	$p \mapsto F(p)\mathrm{e}^{-\alpha p}$

Un système linéaire est composé d'un variateur de vitesse et d'un moteur à forte inertie.
On lui soumet une consigne en tension dépendant du temps t et modélisée par la fonction causale e définie par :

$$e(t) = tU(t) - (t-10)U(t-10) \text{ pour tout réel } t.$$

Le temps t est exprimé en seconde. La consigne en tension $e(t)$ est exprimée en volt.

1. **a.** En remplaçant $U(t)$ et $U(t-10)$ par leurs valeurs, simplifier l'expression de $e(t)$ en faisant les cas nécessaires.

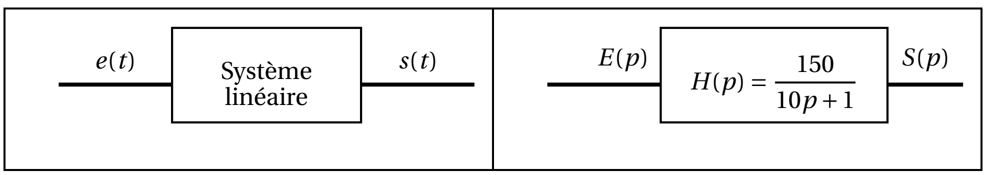
b. Tracer la courbe représentant la fonction e dans le repère fourni sur le document réponse.

La vitesse du moteur, en tour par minute (tr/min), est modélisée par la fonction s obtenue à la sortie du système.

On note $E : p \mapsto E(p)$ et $S : p \mapsto S(p)$ les transformées de Laplace des fonctions e et s.

La fonction de transfert simplifiée est définie par : $H(p) = \dfrac{150}{10p+1}$.

On rappelle que : $\boldsymbol{S(p) = H(p) \times E(p)}$.



2. Déterminer $E(p)$ puis $S(p)$ en fonction de p.

3. On note : $F(p) = \dfrac{1}{p^2(10p+1)}$.

Un logiciel de calcul formel donne une nouvelle expression de $F(p)$ comme somme de trois « éléments simples ».

► Calcul formel	
1	$F(p) = 1/(p\text{^}2(10p+1)$ $\rightarrow F(p) := \dfrac{1}{10p^3+p^2}$
2	ÉlémentsSimples$[F(p)]$ $\rightarrow \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{10}{p} + \dfrac{100}{10p+1}$

En remarquant que $\dfrac{100}{10p+1} = \dfrac{10}{p+0,1}$, déterminer l'original $f(t)$ de $F(p)$.

4. On remarque que : $S(p) = 150F(p) - 150F(p)\mathrm{e}^{-10p}$.

a. Exprimer $s(t)$ en utilisant les fonctions f et U.

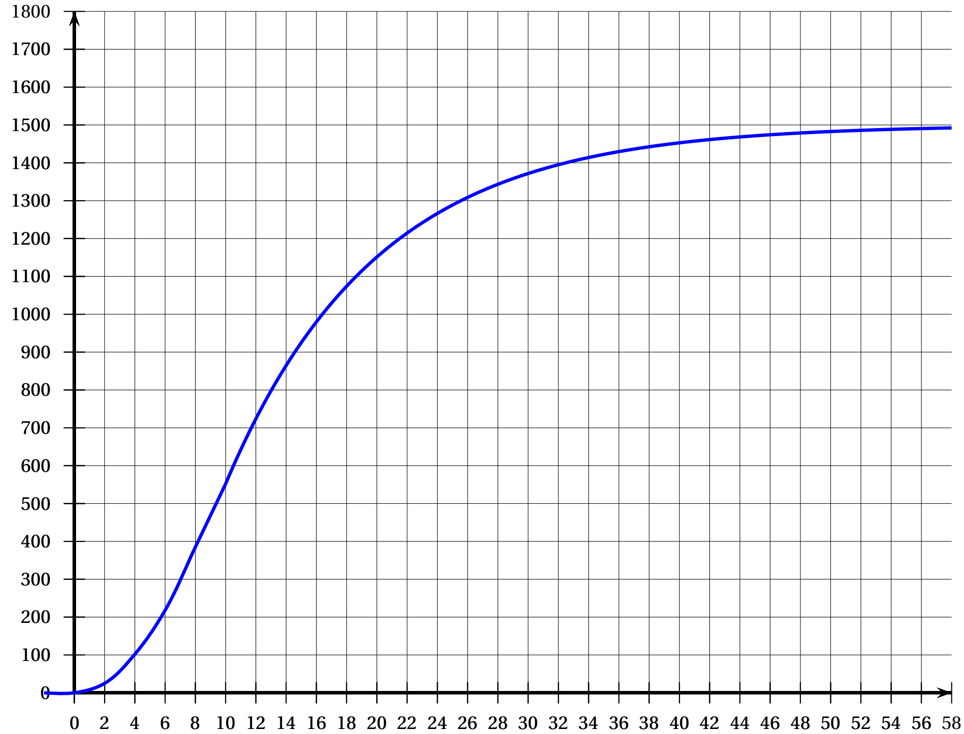
b. Montrer que pour $t \geqslant 10$: $s(t) = 1\,500 + 1\,500\left(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-0,1t+1}\right)$.

5. On a représenté ci-dessous la courbe de la fonction s.

a. Par lecture graphique, conjecturer la limite de la fonction s lorsque t tend vers $+\infty$.

b. Prouver la conjecture à l'aide de l'expression de $s(t)$ pour $t \geqslant 10$.

c. Interpréter la valeur de cette limite pour le système étudié.


1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58

Document réponse à rendre avec la copie

Exercice 3 - question 1. b.