∽ Brevet de technicien supérieur Métropole ∾
Groupement B2 (CIM) session 2006

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y'' - 3y' - 4y = -5\mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}_0) \quad : \quad y'' - 3y' - 4y = 0.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

B. Étude locale d'une fonction

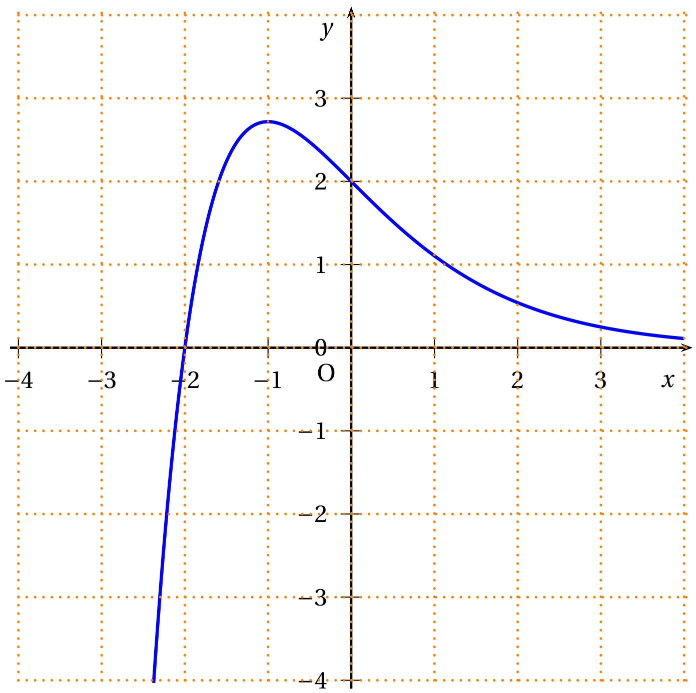
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est

$$f(x) = 2 - x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \ \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

2. Déduire du **1** une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T au voisinage du point d'abscisse 0.

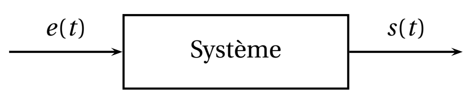


C. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^{0,6} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $I = 3 - 3,6\mathrm{e}^{-0,6}$.
2. Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.
3. Donner une interprétation graphique du nombre I.

Exercice 2 **9 points**



On considère un système (électrique ou mécanique) et on note $e(t)$ le signal d'entrée et $s(t)$ le signal de sortie. Un système du 1^er^ ordre est un système régi par une équation différentielle du type $(\mathrm{E_D})$:
$T\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = Ke(t)$, où T et K sont des constantes réelles positives.
On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathscr{L}(s(t))$ où $\mathscr{L}$ est la transformation de Laplace.
La fonction de transfert H du système est alors définie par : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Les trois parties 1° , 2° et 3° peuvent être traitées de façon indépendante

1° *Recherche de la fonction de transfert*

En appliquant la transformation de Laplace $\mathscr{L}$ aux deux membres de l'équation différentielle $(\mathrm{E_D})$ et en supposant que $s\left(0^+\right) = 0$ (le système est initialement au repos), montrer que :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp}.$$

Dans le reste de l'exercice, on prendra $K = T = 1$

2° *Recherche du signal de sortie dans un cas particulier*

On suppose que le signal d'entrée est $e(t) = 2\mathcal{U}(t-3)$.

a. Représenter sur la feuille de copie la fonction e dans un repère orthogonal pour t élément de $[-1\ ;\ 6]$.

b. Calculer $E(p)$.

c. Montrer que $S(p) = 2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-3p}}{p} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3p}}{p+1}\right)$.

d. En déduire l'expression du signal de sortie $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p))$.

3° *On se propose dans cette question de déterminer le « lieu de transfert » associé à la fonction de transfert H*

On note j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$ et on pose $p = \mathrm{j}\omega$ avec $\omega \in]0\ ;\ +\infty[$.

On a alors : $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$.

Dans ce qui suit, les représentations graphiques demandées sont à réaliser sur une feuille de papier millimétré avec un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 5 centimètres.

On appelle M_ω le point d'affixe $z = 1 + \mathrm{j}\omega$ et N_ω le point d'affixe $H(\mathrm{j}\omega)$ pour tout ω de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

a. On lit sur l'écran d'une calculatrice que les valeurs de $H(\mathrm{j}\omega)$ pour $\omega = \dfrac{3}{4}$, $\omega = 1$ et $\omega = \sqrt{3}$ sont :

$$H\left(\mathrm{j}\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{25} - \frac{12}{25}\mathrm{j} \quad ; \quad H(\mathrm{j}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j} \quad ; \quad H\left(\mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{j}.$$

Placer sur une figure les points M_ω et N_ω pour $\omega = \dfrac{3}{4}$, $\omega = 1$ puis $\omega = \sqrt{3}$.

b. Tracer sur la figure du 3° **a.** l'ensemble $\mathcal{E}_1$ décrit par le point M_ω lorsque ω varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Quelle est la transformation complexe qui associe au point M_ω d'affixe $z = 1 + \mathrm{j}\omega$ le point N_ω d'affixe $Z = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$.

d. Tracer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ décrit par le point N_ω lorsque ω varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Formulaire

On rappelle les formules suivantes sur la transformation de Laplace.

$$\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}\ ;$$

Plus généralement, si on note $\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)] = F(p)$ alors,

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = F(p)\mathrm{e}^{-\tau p}\ ;$$
$$\mathcal{L}[f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)] = F(p+a)\ ;$$
$$\mathcal{L}[f'(t)\mathcal{U}(t)] = pF(p) - f\left(0^+\right).$$